Вінницький державний педагогічний університет
імені Михайла Коцюбинського

Гарвацький В.С., Калашніков І.В., Кулик В.Т.

ОСНОВИ АЛГЕБРИ

Частина 1

Вінниця 2012

УДК 510(075.8)
ББК 22.141я73
Г20

Рецензенти:
зав. каф. вищої математики Вінницького національного технічного університету, доктор педагогічних наук, професор Клочко В.І.;
кандидат фізико-математичних наук, професор кафедри математики Вінницького державного педагогічного університету Трохименко В.С.

Гарвацький В.С., Калашніков І.В., Кулик В.Т. Основи алгебри. Частина 1. — Вінниця: ТОВ фірма «Планер» 2012. — 314 с.

ISBN 978-966-2337-08-2

Навчальний посібник містить теоретичний матеріал, присвячений розкриттю суті основних алгебраїчних, математичних понять та фактів, що зустрічаються як в шкільній, так і вузівській математиці.

Виклад матеріалу супроводжується ілюстрацією прикладів з їх детальним розв'язанням. Кожна із тем розділу містить значну кількість завдань для їх розв'язання як на практичних заняттях, так і для самостійної та індивідуальної роботи.

Рекомендовано до друку Вченою радою інституту математики, фізики і технологічної освіти — протокол № 7 від 13 січня 2012 р.

Автори:
Гарвацький Володимир Сергійович,
Калашніков Ігор В'ячеславович,
Кулик Володимир Тихонович

ISBN 978-966-2337-08-2

Зміст

Передмова

Навчальний посібник, в основному, призначений для студентів першого курсу математичних спеціальностей педагогічних університетів та інститутів як стаціонарної, так і заочної форм навчання. Разом із тим він може бути корисний вчителям математики і учням, які цікавляться математикою.

Головною метою авторів посібника є теоретичне обґрунтування основних математичних понять та фактів, що зустрічаються як у шкільній математиці, так і в основних вузівських математичних курсах.

До кожної з тем посібника подається детальний виклад теоретичного матеріалу, який супроводжується прикладами та ілюстраціями.

Для кращого сприйняття матеріалу його поділено на смислові блоки (пункти), які нумеруються цифрами, та між якими пропускається рядок. Фрагменти тексту, на які автори хочуть зробити особливий наголос, виділено **жирним** шрифтом. *Курсивом* виділено основні означення, теореми, властивості тих чи інших об'єктів.

Абзац виділяє логічно завершену частину певного матеріалу в смисловому блоці.

Наприкінці кожної теми подаються запитання та вправи різної складності, простіші з них доцільно використовувати як завдання для самостійних робіт. До кожного з простих запитань можна знайти відповідь у теоретичний частині відповідної теми. На нашу думку, опанування матеріалом даного посібника дасть можливість студентам свідомо засвоїти відповідний теоретичний матеріал та застосувати його практично.

Посібник у деякій мірі сприятиме впровадженню кредитно-модульної системи навчання. На вивчення матеріалу відводиться 4 кредити по 36 годин, тобто 144 години, половина з яких відводиться на самостійну роботу студента. Весь навчальний матеріал розбито на 2 змістових модулі, які водночас і є модулями контролю. Варіант розбиття одного з модулів подано в таблиці нижче.

Види діяльності (контролю)		Бали, які можна набрати за кожний із видів діяльності
1	Готовність до лекційних занять	9
2	Робота біля дошки на практичних заняттях	9
3	Виконання домашніх завдань	9
4	Самостійна та індивідуальна роботи	23
5	Колоквіум	25
6	Контрольна робота	25
Разом		100

Перший модуль «Елементи математичної логіки і теорії бінарних відношень» включає: алгебру висловлень та її застосування, алгебру множин, логіку предикатів, відомості про бінарні відношення. Другий модуль «Основні алгебри та числові системи» включає: поняття алгебраїчних структур: півгрупи, квазігрупи, групи, кільця, поля; також розглядаються числові системи: натуральних, цілих, раціональних, дійсних, комплексних чисел; розглянуто найпростіші поняття про бульові алгебри.

Автори щиро вдячні рецензентам за ряд цінних зауважень щодо змісту посібника, врахування яких поліпшило його структуру.

Список умовних позначень

$\vdots$ — відношення подільності націло;
(a, b) — НСД чисел a і b;
$[a, b]$ — НСК чисел a і b;
$\wedge$ — конюнкція, логічне „і“;
$\vee$ — диз’юнкція, логічне „або“;
$\sqcup$ — роздільна диз’юнкція;
T — істинне висловлення, істина;
F — хибне висловлення, хиба;
$\rightarrow$ — імплікація, логічне „якщо, то“;
$\Rightarrow$ — логічне слідування, логічне „якщо, то“;
$\equiv$ — рівносильність;
$\leftrightarrow$ — еквіваленція;
$\Leftrightarrow$ — логічна еквівалентність, логічне „тоді і тільки тоді“;
$\forall$ — квантор загальності;
$\exists$ — квантор існування;
$\cap$ — перетин множин;
$\cup$ — об’єднання множин;
$\setminus$ — множинний мінус;
$-$ — знак симетричної різниці множин;
$\subset$ — відношення нестрогого включення;
$\varnothing$ — порожня множина;
U — універсальна множина;
$\overline{A}$ — доповнення множини A до певної універсальної множини;
$\in$ — відношення належності;

$\notin$ — відношення заперечення належності;

M_n — множина всіх чисел натурального ряду до елемента n включно;

$\mathbb{N}$ — множина натуральних чисел;

N_0 — множина натуральних чисел з нулем;

M_n — множина чисел натурального ряду до елемента n включно;

N^n — множина впорядкованих n-ок натуральних чисел (N^2 — множина впорядкованих пар натуральних чисел);

$\mathcal{N}$ — алгебра, елементами якої є натуральні числа;

$*, \star, \circ$ — значки для позначення бінарних операцій;

$\mathbb{Z}$ — множина цілих чисел;

Z_- — множина від'ємних цілих чисел;

$\mathcal{Z}$ — алгебра, елементами якої є цілі числа;

$\mathbb{Q}$ — множина раціональних чисел;

Q_+ — множина додатних раціональних чисел;

Q_- — множина від'ємних раціональних чисел;

$\mathcal{Q}$ — алгебра, елементами якої є раціональні числа;

$\mathbb{R}$ — множина дійсних чисел;

R_+ — множина додатних дійсних чисел;

R_- — множина від'ємних дійсних чисел;

$\mathcal{R}$ — алгебра, елементами якої є дійсні числа;

$\mathbb{C}$ — множина комплексних чисел;

$\mathcal{C}$ — алгебра, елементами якої є комплексні числа;

$f : A \overset{\text{в(на)}}{\longrightarrow} B$ — відображення f множини A в(на) множину B;

$\varphi(a)$ — образ елемента a при відображенні $\varphi : A \longrightarrow B$;

$A \times B$ — декартів добуток;

ρ — бінарне відношення;

$pr_1\rho$ — проекція бінарного відношення $\rho \subset A \times B$ на першу множину A декартового добутку;

$\rho\langle a\rangle$ — зріз бінарного відношення по елементу a;

$Re(z)$ — дійсна частина комплексного числа;

$Im(z)$ — коефіцієнт уявної частини комплексного числа.

Розділ 1

Елементи математичної логіки

1 Елементи алгебри висловлень

1. Алгебра висловлень як елементарна частина математичної логіки.

2. Поняття про висловлення та їх рівносильність.

3. Логічні операції над висловленнями.

4. Логічні формули; їх рівносильність та спрощення; види формул; таблиці істинності формул.

5. Властивості логічних операцій.

6. Питання для самоперевірки засвоєння знань та вправи.

7. Відповіді та вказівки до розв'язання деяких вправ.

1.1 Алгебра висловлень як елементарна частина математичної логіки

1. При повсякденному спілкуванні, в зв'язку з неоднозначністю тлумачення та розуміння мови, можуть виникати труднощі як в процесі міркувань, так і при отриманні певних висновків на основі цих міркувань.

Наука, в якій вивчаються закони та форми мислення (міркувань), називається **формальною логікою**. Основоположником і творцем цієї науки вважається давньогрецький філософ Арістотель (384 — 322 роки до Нової ери), який вперше розробив теорію логічного виводу, теорію дедукції.

Мал. 1.1. Арістотель (384 — 322 роки до Нової ери)

Формальна логіка вивчає форми міркувань, незалежні від їх конкретного змісту, та встановлює відповідні закони.

2. Значний прогрес відбувся у формальній логіці в зв'язку з ідеями застосування математичних методів, математичної символіки, алгебраїчного підходу до логіки. Вперше такі ідеї вже висловлював німецький математик Готфрід Вільгельм Лейбніц (1646 — 1716 роки), який вважав, що логіка має стати «мистецтвом алгебраїчного числення», допомагати розв'язувати суперечки вчених спокійним численням, а помилку в міркуваннях виявляти як обчислювальну помилку.

Здійснюватися ідеї Лейбніца почали в середині дев'ятнадцятого століття в працях англійського математика Джорджа Буля (1815 — 1864 роки) та шотландського математика Огастеса де Моргана (1806 — 1878 роки), в результаті чого логіка оформилася як своєрідна алгебра — **алгебра логіки**.

Подальше впровадження математичної символіки та методів математики сприяло перетворенню формальної логіки в **символьну логіку**, яку ще називають **математичною логікою**.

Мал. 1.2. Готфрід Вільгельм Лейбніц (1646 — 1716 роки)

Значний вклад у розвиток математичної логіки внесли цілий ряд математиків. Серед них такі, як: Г. Фреге, Дж. Пеано, Б. Рассел, А. Уайтхед, А. Тюрінг, А. Тарський, Я. Лукасевич, Д. Гільберт, К. Гьодель, С. Кліні, Е. Пост, А. Чьорч, П.С. Новіков, А.А. Марков, А.М. Колмогоров, М.А. Шанін, А.І. Мальцев та багато інших.

Відмітимо, що з сучасної точки зору на математичну логіку можна дивитись двояко: з одного боку — це математична теорія, яку можна назвати **математикою логіки**, а з іншого боку її можна розглядати як **логіку математики**, оскільки в ній чітко розроблена точна логічна мова математики. По суті математична логіка виникла в результаті взаємного проникнення логіки в математику і математики в логіку.

3. Математична логіка відіграла надзвичайно важливу роль у стрункій побудові основ математики, у розробці сучасного аксіоматичного методу, в подоланні тих протиріч, що виникали у самій математиці, в розробці теорії математичного доведення. Але це не єдина важлива заслуга математичної логіки.

Слід відмітити, що в даний час математична логіка знайшла практичне застосування в самих різноманітних сферах людської діяльності. Без неї неможливо обійтись ні математику, ні філософу, ні юристу, ні психологу, ні педагогу, ні медику, ні економісту. Математична логіка знайшла різноманітні застосування в техніці, стала теоретичною базою інформатики, кібернетики, теорії автоматів, розробки ЕОМ тощо.

4. При доведенні математичних тверджень ми, як правило, використовуємо правильні форми міркувань. Ці форми міркувань якраз і є законами математичної логіки. Одне із основних завдань математичної логіки при застосуваннях до математики якраз і є виділення таких основних логічних законів, які використовуються для доведення математичних теорем.

Подібно до того, як арифметика є початковою найпростішою складовою частиною алгебри і всієї математики, найпростішою елементарною частиною математичної логіки є **логіка висловлень**, яку ще називають **алгеброю висловлень**. Основними об'єктами дослідження в ній є такі твердження (речення), які називаються **висловленнями**, та операції над ними. З одного боку вона дійсно є елементарною частиною логіки, а з другого боку це є і алгебра в силу тих методів, алгебраїчних прийомів, що використовуються в ній.

1.2 Поняття про висловлення та їх рівносильність

1. Як зазначалося вище, основними об'єктами вивчення в математичній логіці і, в першу чергу, в її складовій елементарній частині — алгебрі висловлень — є висловлення та операції над ними.

Що ж розуміють під висловленнями та операціями над ними?

Поняття висловлення в логіці висловлень, як правило, **вважається первісним, неозначуваним** (пригадаймо: з аналогічною ситуацією ми зустрічалися в геометрії, коли поняття, наприклад, точки, прямої теж не означуються і є первісними). Опишемо це поняття таким чином.

Під висловленням (або, говорять, твердженням, судженням) будемо розуміти таке розповідне речення, що виражає певну думку і яке вважається істинним або ж хибним в даних дослідженнях; при цьому кожне з висловлень обов'язково або істинне, або ж хибне в цих дослідженнях і не може бути одночасно як істинним, так і хибним.

Безперечно, що питальні та окличні речення не є висловленнями. Зазначимо, що і не будь-яке розповідне речення є висловленям. Наприклад, речення, які близькі по структурі до речень наказової форми, теж не варто відносити до висловлень (взяти хоча би речення такого змісту, як «Вася, будь ласка, запиши домашнє завдання»).

Коли будь-яке розповідне речення при даному дослідженні відносять до висловлення, то при його розгляді абстрагуються від внутрішнього його змісту, не звертають увагу, наскільки воно милозвучне, яка кількість у ньому слів, голосних чи приголосних букв тощо. Єдине, що про нього маємо знати в даному дослідженні, — це те, чи воно є істинним, чи воно є хибним, і навіть не цікавитися тим, а як же встановлено, що воно істинне, чи хибне.

2. Розглянемо наступні **приклади:**

1. Петренко проживає в Жмеринці.
2. $2 < 6$.
3. $\triangle ABC$ — прямокутний.
4. $5 \cdot 4 = 9$.
5. Сніг — білий.
6. Білий сніг.
7. Сьогодні — середа.
8. Іван пішов у ліс.
9. Трикутник — це частина площини, яка обмежена замкненою ламаною лінією, що складається з трьох відрізків.
10. Чому на дереві листя зелені?
11. $x + y = 9$.
12. Ідіть звідси геть!
13. $3 + 4 \leqslant 5$.
14. $5 - 4 + x$.

Очевидно, що речення 1) — 5), 7), 8), 13) є висловленнями. При цьому істинність таких висловлень, як 1), 3), 5), 7), 8) залежить від додаткових умов; висловлення 4), 13) — хибні. Приклад 6) не є реченням (немає присудка); приклад 14) є алгебраїчним виразом; приклад 9) — це означення, а тому, не є висловленням; приклади 10), 12) не є розповідними реченнями: 10) — питальне речення, 12) — окличне речення наказової форми; приклад 11) теж не є висловленням, оскільки містить змінні x, y, але може перетворитися у висловлення, якщо замість x, y взяти, наприклад, значення 2 і відповідно 3.

3. Висловлення часто будемо позначати малими латинськими буквами $a, b, c, \ldots$. Наприклад, будемо вживати рівності виду «$a = 5 < 3$», «$b = 4$ — парне число», де звичайний математичний символ «$=$» рівності вказує на заміну висловлення, що знаходиться в правій частині рівності, на відповідне позначення його латинською буквою, яка міститься в лівій частині.

Оскільки висловлення трактується як розповідне речення, яке обов'язково або істинне, або ж хибне, то під значенням висловлення розумітимемо його **істинносне значення** — істина (англійською мовою true) або ж хиба (англійською мовою false). Надалі для зручності позначатимемо істину символом 1, а хибу символом 0; іноді їх позначають ще й буквами T або ж F відповідно.

Записи $p(a), p(b), p(c), \ldots$ вживатимемо як логічні, тобто істинносні, значення висловлень $a, b, c, \ldots$. Тому за означенням маємо:

$$p(a) \overset{df}{=} \begin{cases} 0, & \text{якщо } a \text{ — хибне висловлення;} \\ 1, & \text{якщо } a \text{ — істинне висловлення,} \end{cases}$$

де запис df над знаком «$=$» є скороченням від слова «definition», що перекладається з англійської мови як «означення».

У зв'язку з тим, що кожне з висловлень приймає точно одне із істинносних значень 0 або ж 1, всі висловлення можна поділити на два класи — клас істинних висловлень і клас хибних висловлень. Ті висловлення, що належать до одного класу, будемо називати **рівносильними між собою** і позначатимемо зв'язок їх рівносильності символом „$\equiv$“. Отже, маємо такий символічний запис: $a \equiv b \overset{df}{\Leftrightarrow} p(a) = p(b)$, який вказує на те, що висловлення, позначені буквами a та b, рівносильні між собою, тобто їх значення істинності рівні: $p(a) = p(b)$. Тут і надалі символічний запис $\overset{df}{\Leftrightarrow}$ вживатиметься для заміни за означенням одного позначення, в даному випадку $a \equiv b$, на інше; в даному випадку $p(a) = p(b)$.

1.3 Логічні операції над висловленнями

1. При більш детальному розгляді висловлень можна помітити, що деякі з них за своєю конструкцією (будовою) простіші, а деякі складніші, тобто утворені з кількох більш простих за будовою висловлень. Ті з висловлень, які неможливо розчленити при їх дослідженні на простіші висловлення, називатимемо **простими** або, говорять, **елементарними висловленнями**, а ті, що можна розчленити на інші висловлення, називатимемо **складними** (або іноді говорять, складеними).

2. Розглянемо такі **приклади:**

1. $a =$«Якщо 12 ділиться на 6, то воно ділиться на 2 і на 3». Дане висловлення a складне. Його можна розбити на такі прості висловлення: $b =$«12 ділиться на 6»; $c =$«12 ділиться на 2»; $d =$«12 ділиться на 3». В результаті висловлення a в більш короткій формі можна виразити так: $a =$«якщо b, то c і d», де слова «якщо то», «і» називають **логічними зв'язками**.

2. $a =$«Добуток двох чисел k, l нульовий тоді і тільки тоді, коли хоча би одне з них дорівнює нулю». В більш скороченій формі, з математичною символікою, це висловлення можна подати так: $a =$«$k \cdot l = 0$ тоді і тільки тоді, коли $k = 0$ або $l = 0$», що легше сприймається для розуміння суті даного складного висловлення a. Розділимо висловлення a на такі більш прості висловлення, як: $b =$«$k \cdot l = 0$»; $c =$«$k = 0$»; $d =$«$l = 0$». В результаті висловлення a прийме такий вигляд: «b тоді і тільки тоді, коли c або d», де слова «тоді і тільки тоді, коли», «або“ — це логічні зв'язки.

3. $a =$„Дане дійсне число є раціональним або не раціональним“; якщо позначимо просте висловлення в цьому прикладі так:

b =„дане дійсне число є раціональним“, то висловлення a прийме такий вигляд a =„b або не b“, де „або“, „не“ — це логічні зв'язки.

3. Із наведених вище прикладів бачимо, що складні висловлення дістаємо з простих висловлень за допомогою сполучних слів, які називають **логічними зв'язками** — таких, як: „і“, „або“, „не“, „якщо ..., то“, „тоді і тільки тоді, коли“ тощо. Але в повсякденній звичайній мові такі сполучні слова не завжди мають один і той же зміст. Тому необхідно **ввести такі логічні операції над висловленнями** які б можна було трактувати однозначно, тобто вкладати в них один і той же зміст. І тоді будуть підстави говорити про алгебру висловлень. Разом з тим цього недостатньо. Саме основне, з якою метою вводять логічні операції над висловленнями, полягає в наступному. Якщо маємо прості, елементарні висловлення, то неважко розібратися в тому, які з них істинні, а які хибні. А от при дослідженні складного висловлення, яке утворене з кількох простіших висловлень, вже виникають труднощі при з'ясуванні його істинносного значення. І саме встановлення істинносного значення (а не внутрішнього змісту) висловлення в залежності від істинносних значень його компонент якраз нас і цікавитиме в першу чергу в алгебрі висловлень.

4. Для введення логічних операцій над висловленнями, що відповідають вказаним вище логічним зв'язкам „і“, „або“, „якщо ..., то“, „тоді і тільки тоді, коли“, „не“ (більш детально „невірно, що“), вживаються відповідно такі символи з відповідними назвами:

„і“ відповідає **кон'юнкція** $\wedge$,
„або“ відповідає **диз'юнкція** $\vee$,
„якщо ..., то“ відповідає **імплікація** $\to$,
„тоді і тільки тоді, коли“відповідає **еквіваленція** $\leftrightarrow$,
„невірно, що“відповідає **заперечення**, яке позначають рискою над символьним позначенням висловлення, а іноді символом $\rceil$.

Перші чотири операції називаються **бінарними** (виконуються над двома висловленнями), а заперечення — **унарною операцією** (виконується над одним висловленням).

При введенні вказаних логічних операцій ми безперечно повинні дати їм такі означення, щоб вони були близькими по тому змісту з відповідними логічним зв'язками, який в них вкладається при вживанні цих зв'язок у звичайній мові.

5. Подібно до того, як в шкільній математиці, в алгебрі вводиться, наприклад, числова змінна, в алгебрі висловлень ми вводимо **висловлювальну змінну**, замість якої можна підставити довільні висловлення. Висловлювальні змінні, як і висловлення, теж позначатимемо малими латинськими буквами $a, b, c, ...$. Їх істинносними значеннями $p(a), p(b), p(c), ...$ аналогічно можуть бути або 0, або ж 1.

Взявши пару $(a; b)$ висловлень a, b і відповідні логічні операції кон'юнкція $\wedge$, диз'юнкція $\vee$, імплікація $\rightarrow$, еквіваленція $\leftrightarrow$, будемо ставити у відповідність цій парі $(a; b)$ відповідно складні висловлення:

$a \wedge b$ (читається „a і b“),
$a \vee b$ (читається „a або b“),
$a \rightarrow b$ (читається „якщо a, то b“),
$a \leftrightarrow b$ (читається „a тоді і тільки тоді, коли b“),

а для унарної операції заперечення будемо ставити у відповідність висловленню a висловлення $\overline{a}$ (читається „невірно, що a“).

6. Математичну логіку, і алгебру висловлень зокрема, не цікавить конкретний зміст висловлень, а лише істинносне значення (0 чи 1), яке приймає складене висловлення в залежності від істинносних значень висловлень, що входять до його складу. Тому доцільно істинносні значення складених висловлень, які утворені за допомогою перелічених вище логічних операцій, задати у вигляді таблиць, які називають **таблицями істинності** цих операцій.

Перш ніж складати такі таблиці істинності для кожної з вказаних операцій, введемо загальноприйняті словесні означення для кожної з них.

Означення 1.3.1. *Кон'юнкцією двох висловлень a і b називається таке складне висловлення $a \wedge b$, яке істинне в тому і лише в тому випадку, коли обидва висловлення a, b істинні.*

Означення 1.3.2. *Диз'юнкцією двох висловлень a і b називається таке складне висловлення $a \vee b$, яке істинне в тому і лише* *в тому випадку, коли істинне хоча б одне з цих висловлень a, b.*

Означення 1.3.3. *Імплікацією двох висловлень a і b називається таке складне висловлення $a \to b$, яке хибне в тому і лише в тому випадку, коли умова a істинна, а висновок b хибний.*

Означення 1.3.4. *Еквіваленцією двох висловлень a і b називається таке складне висловлення $a \leftrightarrow b$, яке істинне в тому і лише в тому випадку, коли обидва висловлення a, b хибні або ж обидва істинні одночасно.*

Означення 1.3.5. *Запереченням висловлення a називається таке висловлення $\overline{a}$, яке істинне, якщо a хибне, і хибне, якщо a істинне.*

Нехай a, b — змінні висловлення, істинносні значення яких можуть незалежно бути 0 або 1. Тоді таблиця істинності для введених вище операцій прийме такий вигляд:

a	b	$a \wedge b$	$a \vee b$	$a \to b$	$a \leftrightarrow b$	$\overline{a}$
0	0	0	0	1	1	1
0	1	0	1	1	0	1
1	0	0	1	0	0	0
1	1	1	1	1	1	0

Оскільки на мові істинносних, тобто логічних, значень для введених операцій виконуються наступні рівності при переході до відповідних логічних операцій над істинносними значеннями висловлювальних змінних:

$$\begin{gathered} p(a \wedge b) = p(a) \wedge p(b), \\ p(a \vee b) = p(a) \vee p(b), \\ p(a \to b) = p(a) \to p(b), \\ p(\overline{a}) = \overline{p(a)}, \end{gathered}$$

то таблиця істинності, приведена вище для логічних операцій, прийме схожий, аналогічний вигляд для відповідних логічних операцій над істинносними значеннями висловлювальних змінних, а саме:

$p(a)$	$p(b)$	$p(a \wedge b)$	$p(a \vee b)$	$p(a \to b)$	$p(a \leftrightarrow b)$	$p(\overline{a})$
0	0	0	0	1	1	1
0	1	0	1	1	0	1
1	0	0	1	0	0	0
1	1	1	1	1	1	0

7. Зробимо деякі зауваження відносно введених логічних операцій та їх назв.

Операцію кон'юнкція іноді називають **логічним множенням**, а сам результат при виконанні цієї операції — **логічним добутком**. Одна із причин таких назв пов'язана з тим, що в силу означення кон'юнкції істинносні значення 0 і 1 для висловлень ведуть себе як арифметичні числа 0 і 1, а саме: $0 \cdot 0 = 0 \cdot 1 = 1 \cdot 0 = 0$; $1 \cdot 1 = 1$. У зв'язку з цим часто символ $\wedge$ для кон'юнкції двох висловлень пропускають.

Операцію диз'юнкція іноді називають **логічним додаванням**, а сам результат при виконанні цієї операції — **логічною сумою**. Ще раз застерігаємо, що диз'юнкція, як логічна операція, відповідає сполучнику **або** в **нероздільному смислі**, який якраз і відповідає введеному означенню диз'юнкції: $0 \vee 0 = 0; 1 \vee 0 = 0 \vee 1 = 1 \vee 1 = 1$.

Іноді вводиться так звана **роздільна диз'юнкція** як логічна операція, яка позначається символом $\sqcup$ і визначається за допомогою істиносних значень 0 і 1 так: $0 \sqcup 0 = 1 \sqcup 1 = 0$; $0 \sqcup 1 = 1 \sqcup 0 = 1$, тобто в результаті висловлення $a \sqcup b$ вважається істинним в тому і лише в тому випадку, коли істинними є тільки одне з висловлень — a або ж b.

Логічну операцію імплікація часто ще називають **логічною імплікацією**, яка, як було раніше відмічено, відповідає умовному твердженню виду „якщо ..., то", що можна виразити також твердженням виду „з ... слідує (випливає)...". Безперечно, що при вживанні умовного речення виду „якщо a, то b" в повсякденній побутовій мові ми маємо на увазі, що існує певний причинний смисловий зв'язок між умовою a та висновком b. Введене ж вище означення імплікації як логічної операції такого зв'язку не передбачає. В ньому лише зв'язуються між собою істинносні значення умови a та висновку b. А тому можна вважати, що логічна імплікація $a \to b$ є більш загальним висловленням в порівнянні з умовним висловленням, яке використовується в побутовій мові. В силу даного вище означення операції імплікації часто говорять, що з брехні (хиби) слідує що завгодно — як істина, так і брехня, а з істини слідує лише істина, і не може з брехні слідувати істина. Візьмемо навіть такі два простих приклади, які до деякої міри пояснюють наведені вище міркування.

1. Твердження „Якщо я отримаю сьогодні стипендію, то піду в кіно“ сприймається хибним лише в такому з чотирьох можливих випадків: „я отримаю сьогодні стипендію і разом з тим не піду в кіно“.

2. Висловлення „Якщо на множині $\mathbb{Z}$ цілих чисел виконується рівність $k = l$, то виконується рівність $k^2 = l^2$, де $k, l \in \mathbb{Z}$“, легко бачити, є істинним висловленням незалежно від того, чи рівність $k = l$ є істинною, чи ні; єдине, що неможливо з чотирьох варіантів — це щоб рівність $k = l$ була істинною, а рівність $k^2 = l^2$ була хибною, що повністю узгоджується з даним раніше означенням імплікації.

1.4 Логічні формули; їх рівносильність та спрощення; види формул; таблиці істинності формул

1. Як було відмічено раніше, однією з основних задач в алгебрі висловлень є встановлення, з'ясування того, чи є те чи інше складне висловлення істинним чи хибним в залежності від істинності чи хибності більш простих висловлень, що утворюють це складне висловлення. Завдяки введенню логічних операцій над висловленнями можна утворювати як завгодно складні висловлення з більш простіших, використавши символи логічних операцій та дужки для встановлення порядку цих операцій. В результаті отримуються записи, які по своїй структурі нагадують алгебраїчні вирази звичайної шкільної математики. Наприклад, складне висловлення має вигляд

$$(((a \vee \overline{c}) \to b) \vee d) \leftrightarrow (e \wedge d),$$

де буквами a, b, c, d, e позначено змінні висловлення чи деякі сталі висловлення або ж, можливо, їх істинностні значення 0 чи 1. Такого виду вирази і називатимемо **логічними формулами алгебри висловлень**.

Більш точне означення логічної формули можна подати у такому вигляді:

Означення 1.4.1. *1. Усі змінні та сталі висловлення, в тому числі і їх істинносні значення T, F, які домовилися позначати відповідно як 1, 0, є логічними формулами (їх ще називають елементарними логічними формулами).*

2. Якщо Φ_1, Φ_2 — логічні формули, то $\overline{(\Phi_1)}$, $(\Phi_1) \wedge (\Phi_2)$, $(\Phi_1) \vee \vee (\Phi_2)$, $(\Phi_1) \to (\Phi_2)$, $(\Phi_1) \leftrightarrow (\Phi_2)$ — логічні формули.

3. Інших логічних формул, крім перелічених в пунктах 1, 2, немає.

Таким чином, логічна формула — це послідовність символів, яка утворена з елементарних формул, які з'єднані між собою символами логічних операцій та круглими дужками.

2. З метою зменшення кількості дужок та полегшення розгляду і дослідження логічних формул домовляються про наступний порядок виконання логічних операцій, які перелічуємо, починаючи з „найстаршої“ (тобто тієї, яка має виконуватися найпершою):

заперечення,
кон'юнкція,
диз'юнкція,
імплікація,
еквіваленція.

Дужки в формулі слід залишати, якщо їх відкидання порушує порядок виконання операцій, або ускладнює аналіз структури формули. Якщо у формулі зустрічаються кілька однакових операцій, то їх виконання здійснюється послідовно зліва направо. Наприклад, запис $a \to b \to c$ означає $(a \to b) \to c$. Зауважимо: якщо у формулі зустрічаються дужки, то операції в першу чергу виконуються в дужках.

3. Знаючи означення логічних операцій над висловленнями та відповідні таблиці істинності, що відповідають цим операціям, ми можемо встановити значення істинності довільної логічної формули в залежності від значень істинності елементарних висловлень, які входять до цієї формули.

Наведемо **приклад**. Знайти значення істинності формули $\Phi = (a \to b \wedge c) \vee \overline{b}$, якщо $p(a) = 1$, $p(b) = 0$, $p(c) = 1$.

Розв'язання. Підставивши задані істинносні значення висловлювальних змінних a, b, c у формулу Φ, отримаємо: $p(\Phi) = p((a \to b \wedge c) \vee \overline{b}) = (p(a) \to p(b) \wedge p(c)) \vee \overline{p(b)} = (1 \to 0 \wedge 1) \vee \overline{0} = (1 \to 0) \vee \vee 1 = 0 \vee 1 = 1$. Отже, $p(\Phi) = 1$.

Аналогічно можна знайти істинносні значення цієї формули при інших можливих істинносних значеннях елементарних висловлень, що входять у формулу.

Надалі, відмітимо, логічні формули позначатимемо великими грецькими буквами (з можливими при потребі індексами).

4. Для того, щоб встановити істинносні значення логічної формули при будь-яких можливих істинносних значеннях висловлювальних змінних, які входять у дану формулу, зручно скласти відповідну їй таблицю, яка називається **таблицею істинності формули**. Така таблиця складається з 2^n рядків заповнення істинносними значеннями 0 і 1 для кожної із n різних висловлювальних змінних, які входять у формулу (кількість 2^n отримується за рахунок того, що кожна із різних n змінних може незалежно приймати одне із двох можливих значень — 0 або 1). Кількість стовпців цієї таблиці рівна кількості всіх символів у формулі, за виключенням дужок. Порядок заповнення стовпців таблиці істинносними значеннями 0 і 1 узгоджується з порядком виконання операцій у формулі. Першими стовпцями для заповнення є стовпці, які містять висловлювальні змінні. Останній стовпець заповнення якраз і вказуватиме ті істинносні значення, які прийматиме складне висловлення, виражене відповідною формулою, в залежності від істинносних значень висловлювальних змінних, що входять до неї. В останньому рядку таблиці позначають цифрами черговість заповнення стовпців таблиці.

Приклад. Скласти таблицю істинності формули $\Phi = (a \to b \wedge \wedge c) \vee \overline{b}$.

Розв'язання. Очевидно, що таблиця істинності даної формули міститиме $2^3 = 8$ рядків заповнення нулями і одиницями, оскільки є три різних змінних — a, b, c, і 7 стовпців заповнення. В результаті вигляд цієї таблиці буде таким:

$(a$	$\to$	b	$\wedge$	$c)$	$\vee$	$\bar{b}$
0	1	0	0	0	1	1
0	1	0	0	1	1	1
0	1	1	0	0	1	0
0	1	1	1	1	1	0
1	0	0	0	0	1	1
1	0	0	0	1	1	1
1	0	1	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	0
1	3	1	2	1	4	2

5. Раніше нами було введено поняття рівносильності для висловлень. Аналогічно вводиться і важливе більш загальне поняття рівносильності логічних формул, а саме:

Означення 1.4.2. *Логічні формули Φ_1 і Φ_2 називаються рівносильними між собою, що позначається символічно у вигляді $\Phi_1 \equiv \Phi_2$, якщо при довільних істинносних значеннях висловлювальних змінних, які входять у ці формули, відповідні значення істинності цих формул співпадають, тобто вони перетворюються в рівносильні висловлення.*

Символічно це означення рівносильності логічних формул можна подати у такому вигляді:

$$\Phi_1 \equiv \Phi_2 \overset{df}{\Leftrightarrow} p(\Phi_1) = p(\Phi_2),$$

де $p(\Phi)$ — істинносне значення логічної формули Φ відносно конкретних істинносних значень висловлювальних змінних, що входять у формулу Φ.

6. В практичних задачах часто постає питання: ті чи інші формули рівносильні між собою, чи ні? Одним із очевидних шляхів встановлення відповіді на це питання є побудова таблиць істинності для формул, які розглядаються. Якщо останні, по заповненню, стовпці в цих таблицях при відповідних істинносних значеннях висловлювальних змінних співпадають, то такі формули рівносильні; в противному випадку вони не рівносильні.

Приклад. Перевірити, чи формула $\Psi = b \to \overline{a} \vee c$ рівносильна розглянутій вище формулі $\Phi = (a \to b \wedge c) \vee \overline{b}$.

Розв'язання. Складемо таблицю істинності для формули Ψ та порівняємо її з таблицею істинності складеної раніше таблиці істинності для формули Φ. Надавши висловлювальним змінним a, b, c всіх можливих істинностних значень, в результаті матимемо таку таблицю істинності для формули Ψ:

a	b	$\to$	$\overline{a}$	$\vee$	c
0	0	1	1	1	0
0	0	1	1	1	1
0	1	1	1	1	0
0	1	1	1	1	1
1	0	1	0	0	0
1	0	1	0	1	1
1	1	0	0	0	0
1	1	1	0	1	1
1	1	4	2	3	1

Бачимо справді, що останній стовпець заповнення таблиці істинності для формули Ψ співпадає з останнім стовпцем заповнення таблиці істинності формули Φ. Тому $\Psi \equiv \Phi$.

Зауважимо, що формула $\Upsilon = a \wedge b \to c$ теж рівносильна попереднім розглянутим формулам Φ і Ψ, тобто $\Upsilon \equiv \Psi \equiv \Phi$ (самостійно доведіть, що $\Upsilon \equiv \Phi$, склавши відповідну таблицю істинності для формули Υ).

7. Порівнюючи між собою розглянуті вище рівносильні формули $\Phi = (a \to b \wedge c) \vee \overline{b}$, $\Psi = b \to \overline{a} \vee c$, $\Upsilon = a \wedge b \to c \equiv ab \to c$, бачимо, що найпростішою серед них є третя формула $\Upsilon = ab \to c$, де термін „простіша формула“ ми тлумачимо як „формула, яка містить менше символів“. Тому безперечно виникає питання про те, як спростити ту чи іншу логічну формулу, тобто замінити її такою рівносильною формулою, яка має менше символів, має, говорять, більш компактний вигляд. У зв'язку з цим виникає питання про те, які ж існують рівносильні перетворення, які дають можливість замінити одну формулу на іншу, рівносильну їй і по можливості простішу. Задача про спрощення логічних формул буде легше реалізована тоді, коли ми познайомимося детальніше з властивостями логічних операцій над висловленнями. З такими властивостями ми познайомимося нижче.

Поки що відмітимо лише один із основних і очевидних принципів, який можна використовувати при рівносильних перетвореннях логічних формул — це **принцип заміни:** якщо в довільній логічній формулі Φ замінити яку-небудь її частину Φ_1, яка є формулою, на рівносильну до Φ_1 формулу Φ_2, то отримається формула Ψ, рівносильна до Φ.

Наведемо **ілюструючий приклад**. Нехай $\Phi = a \vee \overline{b}\overline{c} \to (ab \to c)$ і $\Phi_1 = ab \to c$, $\Phi_2 = b \to \overline{a} \vee c$. Оскільки $\Phi_1 \equiv \Phi_2$ (дивись попередні міркування про встановлення рівносильності $ab \to c \equiv b \to \overline{a} \vee c$), то $\Phi \equiv \Psi$, де $\Psi = a \vee \overline{b}\overline{c} \to (b \to \overline{a} \vee c)$.

8. Множину всіх логічних формул алгебри висловлень можна розбити на такі три класи:

1. **Тотожно істинні формули (або тавтології)** — це такі формули, які при будь-яких істинносних значеннях висловлювальних змінних, які входять до них, приймають значення 1 (тобто істину — T).

2. **Тотожно хибні формули** — це такі формули, які при будь-яких істинносних значеннях висловлювальних змінних, які входять до них, приймають значення 0 (тобто хибу — F).

3. **Нейтральні формули** — це такі формули, які приймають як значення 0, так і значення 1 при певних істинносних значеннях висловлювальних змінних, які входять до них.

В алгебрі висловлень надзвичайно важливу роль відіграють ті тотожно істинні формули, які виражають **логічні закони** алгебри висловлень (дивись про це в наступній темі).

Легко перевірити, що, наприклад:

$a \to a$, $ab \to b$ — тотожно істинні формули;
$a \wedge \overline{a}$ — тотожно хибна формула;

$ab \to ac$ — нейтральна формула (самостійно перевірте).

Іноді розглядають клас **виконуваних логічних формул**.

Означення 1.4.3. *Формула називається виконуваною, якщо вона не є тотожно хибною, тобто вона є тотожно істинною або нейтральною.*

9. Щоб встановити, до якого із трьох відмічених вище класів належить логічна формула, можна скласти відповідну їй таблицю істинності. Якщо в останньому стовпці заповнення цієї таблиці містяться лише одиниці, то ця формула є тавтологією; якщо містяться лише нулі, то ця формула є тотожно хибна, а якщо є і нулі, і одиниці, то формула нейтральна. Означення логічних формул трьох відмічених вище класів можна було би символічно дати в такій формі:

Означення 1.4.4. Φ — *тотожно істинна формула* $\overset{df}{\Leftrightarrow} \Phi \equiv T \overset{df}{\Leftrightarrow} p(\Phi) = 1;$

Φ — *тотожно хибна формула* $\overset{df}{\Leftrightarrow} \Phi \equiv F \overset{df}{\Leftrightarrow} p(\Phi) = 0;$

Φ — *нейтральна формула* $\overset{df}{\Leftrightarrow} \Phi \neq T \wedge \Phi \neq F \overset{df}{\Leftrightarrow} p(\Phi) \neq 0 \wedge \wedge\, p(\Phi) \neq 1.$

З означення операції заперечення висловлення випливає такий взаємозв'язок між формулами цих трьох класів:

1. Φ — тотожно істинна формула $\Leftrightarrow \overline{\Phi}$ — тотожно хибна формула;
2. Φ — тотожно хибна формула $\Leftrightarrow \overline{\Phi}$ — тотожно істинна формула;
3. Φ — нейтральна формула $\Leftrightarrow \overline{\Phi}$ — нейтральна формула.

Зауваження. Нами використовується спеціальний символ $\Leftrightarrow$, яким ми будемо користуватися і надалі (іноді такого виду нові символи в порівнянні з введеними для логічних операцій називають **метасимволами**; такими, до речі, є введені раніше символи $\overset{df}{\Leftrightarrow}$, $\overset{df}{=}$). Цей символ $\Leftrightarrow$ назвемо **логічною еквівалентністю**. Вживається він в такому розумінні: **якщо A, B — висловлювальні речення, то запис $A \Leftrightarrow B$ означає певну теорему, істинносний зміст якої криється в тому, що еквіваленція $A \leftrightarrow B$ є істинним висловленням, тобто $(A \leftrightarrow B) \equiv 1$.**

Останню рівносильність іноді записують ще і в такому вигляді: $\models (A \leftrightarrow B)$, де стилізований символ $\models$ нагадує перший символ слова „Теорема“. Зауважимо, що логічну еквівалентність $A \Leftrightarrow B$ можна подати і як рівносильність $A \equiv B$.

1.5 Властивості логічних операцій

1. Введені нами логічні операції над висловленнями володіють цілим рядом властивостей. Деякі з цих властивостей по формі запису нагадують властивості звичайних алгебраїчних операцій в шкільній математиці, але з тією різницею, що властивості алгебраїчних операцій записуються у вигляді рівностей (наприклад, $x + y = y + x$, де x, y — числові змінні), а властивості логічних операцій подано у вигляді рівносильностей (наприклад, $a \vee b \equiv b \vee a$, де a, b — висловлювальні змінні). Зауважимо, що ці рівносильності можна також подати і у вигляді рівностей для істинносних значень висловлювальних змінних. Наприклад, рівносильність $a \vee b \equiv b \vee a$, можна подати у вигляді рівності $p(a) \vee p(b) = p(b) \vee p(a)$, яка, правда, на вигляд дещо громіздка за відповідну рівносильність $a \vee b \equiv b \vee a$.

2. Серед властивостей логічних операцій над висловленнями відмітимо, в першу чергу, наступні з відповідними назвами для деяких з них:

$$aa \equiv a \text{ — ідемпотентність кон'юнкції } \wedge; \tag{1.5.1}$$

$$a \vee a \equiv a \text{ — ідемпотентність диз'юнкції } \vee; \tag{1.5.2}$$

$$ab \equiv ba \text{ — комутативність кон'юнкції } \wedge; \tag{1.5.3}$$

$$a \vee b \equiv b \vee a \text{ — комутативність диз'юнкції } \vee; \tag{1.5.4}$$

$$(ab)c \equiv a(bc) \text{ — асоціативність кон'юнкції } \wedge; \tag{1.5.5}$$

$$(a \vee b) \vee c \equiv a \vee (b \vee c) \text{ — асоціативність диз'юнкції } \vee; \tag{1.5.6}$$

$$a(b \vee c) \equiv ab \vee ac \text{ — дистрибутивність кон'юнкції } \wedge \\ \text{відносно диз'юнкції } \vee; \tag{1.5.7}$$

$$a \vee bc \equiv (a \vee b)(a \vee c) \text{ — дистрибутивність диз'юнкції } \vee \\ \text{відносно кон'юнкції } \wedge; \tag{1.5.8}$$

$$aT \equiv a; \tag{1.5.9}$$

$$a \vee F \equiv a; \tag{1.5.10}$$

$$aF \equiv F; \tag{1.5.11}$$

$$a \vee T \equiv T; \tag{1.5.12}$$

$$\overline{\overline{a}} \equiv a \text{ — закон подвійного заперечення } (\rceil(\rceil a) \equiv a); \tag{1.5.13}$$

$$a\overline{a} \equiv F \text{ — закон протиріччя}; \tag{1.5.14}$$

$$a \vee \overline{a} \equiv T \text{ — закон виключення третього}; \tag{1.5.15}$$

$$\overline{T} \equiv F; \tag{1.5.16}$$

$$\overline{F} \equiv T; \tag{1.5.17}$$

$$\overline{ab} \equiv \overline{a} \vee \overline{b} \text{ — закон де Моргана}; \tag{1.5.18}$$

$$\overline{a \vee b} \equiv \overline{a} \wedge \overline{b} \text{ — закон де Моргана;} \tag{1.5.19}$$

$$a \to b \equiv \overline{a} \vee b; \tag{1.5.20}$$

$$a \leftrightarrow b \equiv (a \to b)(b \to a), \tag{1.5.21}$$

де a, b, c — довільні висловлення, висловлювальні змінні.

3. Те, що відмічені вище рівносильності справді мають місце, легко перевірити шляхом складання відповідних таблиць істинності та їх аналізу (самостійно переконайтеся в цьому).

Відмічені вище властивості логічних операцій над висловленнями часто називають **основними логічними законами алгебри висловлень.** Це пов'язане з тим, що коли має місце рівносильність виду $\Phi_1 \equiv \Phi_2$, де Φ_1, Φ_2 – логічні формули, то їх можна виразити по-іншому, наприклад, одним із таких варіантів:

а) має місце теорема $\models (\Phi_1 \leftrightarrow \Phi_2)$;

б) має місце рівносильність $(\Phi_1 \leftrightarrow \Phi_2) \equiv 1$;

в) $(\Phi_1 \leftrightarrow \Phi_2)$ — тотожно істинна формула;

г) $(\Phi_1 \Leftrightarrow \Phi_2)$ — виконується логічна еквівалентність.

А тому іноді вказані вище властивості логічних операцій над висловленнями записують в іншому вигляді.

Наприклад:

1. $aa \Leftrightarrow a$;
2. $a \vee a \Leftrightarrow a$;
3. $ab \Leftrightarrow ba$;
4. $a \vee b \Leftrightarrow b \vee a$ і т.д.

4. Використовуючи відмічені властивості логічних операцій, можна:

а) з'ясувати, чи вказані логічні формули рівносильні між собою;

б) встановити, до якого класу належить та чи інша логічна формула;

в) спрощувати логічні формули.

Наведемо відповідні ілюструючі приклади застосувань властивостей логічних операцій.

Приклад 1. Показати, що формули $\Phi_1 = b \to \overline{a} \vee c$, $\Phi_2 = (a \to bc) \vee \overline{b}$ рівносильні формулі $\Phi = ab \to c$, яка очевидно є нейтральною і яку замінити на більш простішу рівносильну логічну формулу неможливо.

Розв'язання. Застосувавши відповідні властивості логічних операцій до формул Φ_1, Φ_2, отримаємо такі ланцюжки рівносильних перетворень:
$\Phi_1 = b \to \overline{a} \vee c \equiv \overline{b} \vee (\overline{a} \vee c) \equiv (\overline{b} \vee \overline{a}) \vee c \equiv (\overline{a} \vee \overline{b}) \vee c \equiv \overline{ab} \vee c \equiv ab \to c = \Phi$, що дає $\Phi_1 \equiv \Phi$;
$\Phi_2 = (a \to bc) \vee \overline{b} \equiv (\overline{a} \vee bc) \vee \overline{b} \equiv \overline{a} \vee (bc \vee \overline{b}) \equiv \overline{a} \vee (b \vee \overline{b})(c \vee \overline{b}) \equiv \overline{a} \vee T(c \vee \overline{b}) \equiv \overline{a} \vee (c \vee \overline{b})T \equiv \overline{a} \vee (c \vee \overline{b}) \equiv \overline{a} \vee (\overline{b} \vee c) \equiv (\overline{a} \vee \overline{b}) \vee c \equiv \overline{ab} \vee c \equiv ab \to c$, що вказує на те, що і $\Phi_2 \equiv \Phi$. Отже, рівносильності формул доведені.

Приклад 2. Дослідити, до якого класу належить логічна формула $\Phi = (a \to b) \vee (b \to a)$.

Розв'язання. Спростимо дану формулу Φ. Якщо в результаті спрощень покажемо, що виконується, наприклад, рівносильність $\Phi \equiv T$, то це означатиме, що задана формула Φ є тавтологією. Маємо: $\Phi = (a \to b) \vee (b \to a) \equiv (\overline{a} \vee b) \vee (\overline{b} \vee a) \equiv ((\overline{a} \vee b) \vee \overline{b}) \vee a \equiv (\overline{a} \vee (b \vee \overline{b})) \vee a \equiv (\overline{a} \vee T) \vee a \equiv T \vee a \equiv a \vee T \equiv T$, що і вказує на те, що $\models (a \to b) \vee (b \to a)$, тобто задана логічна формула $\Phi = (a \to b) \vee (b \to a)$ тотожно істинна, тобто Φ є тавтологією.

Приклад 3. Спростити логічну формулу $\Phi = (a \to b)(b \to c) \to abc$.

Розв'язання. Використавши необхідні властивості логічних операцій до даної формули, отримаємо наступний ланцюжок рівносильних перетворень: $\Phi = (a \to b)(b \to c) \to abc \equiv (\overline{a} \vee b)(\overline{b} \vee c) \to abc \equiv \overline{(\overline{a} \vee b)(\overline{b} \vee c)} \vee abc \equiv ((\overline{\overline{a} \vee b}) \vee (\overline{\overline{b} \vee c})) \vee abc \equiv (\overline{\overline{a}}\overline{b} \vee \overline{\overline{b}}\overline{c}) \vee abc \equiv (a\overline{b} \vee b\overline{c}) \vee abc \equiv (a\overline{b} \vee abc) \vee (b\overline{c} \vee abc) \equiv a(\overline{b} \vee bc) \vee b(\overline{c} \vee ac) \equiv a(\overline{b} \vee b)(\overline{b} \vee c) \vee b(\overline{c} \vee a)(\overline{c} \vee c) \equiv aT(\overline{b} \vee c) \vee b(\overline{c} \vee a)T \equiv a(\overline{b} \vee c) \vee b(\overline{c} \vee a) \equiv (a\overline{b} \vee ac) \vee (b\overline{c} \vee ba) \equiv (a\overline{b} \vee ba) \vee (ac \vee b\overline{c}) \equiv a(\overline{b} \vee b) \vee (ac \vee b\overline{c}) \equiv aT \vee (ac \vee b\overline{c}) \equiv (aT \vee ac) \vee b\overline{c} \equiv a(T \vee c) \vee b\overline{c} \equiv aT \vee b\overline{c} \equiv a \vee b\overline{c}$. Отже, в результаті рівносильних перетворень отримали формулу $\Psi = a \vee b\overline{c}$, яка рівносильна заданій формулі $\Phi = (a \to b)(b \to c) \to abc$, але є більш простою, оскільки містить менше символів.

5. Підсумовуючи все сказане вище, можна дати таке тлумачення алгебри висловлень.

Алгебра висловлень — це множина висловлень, висловлювальних змінних, для яких введені логічні операції, які задовольняють відміченим вище властивостям; алгебра висловлень є елементарною частиною математичної логіки подібно до того, як арифметика молодших класів є елементарним розділом алгебри, математики.

Шлях, який нами розглянутий для введення алгебри висловлень — це інтуїтивний шлях розгляду операцій над висловленнями та властивостей цих операцій, який базується на дослідженні відповідних їм таблиць істинності.

Можна було би здійснювати побудову алгебри висловлень на більш строгій, чіткішій основі — шляхом введення відповідних аксіом та правил побудови основних об'єктів алгебри висловлень — логічних формул.

Безперечно, що можна далі більш глибоко розвивати алгебру висловлень в різних напрямках: і в напрямку її використання в тих чи інших розділах математики, прикладних наук, і в напрямку її використання в техніці, в електроніці тощо. Деякі застосування алгебри висловлень ми намітимо в невеликому об'ємі далі в наступних темах та вправах для самостійного опрацювання.

6. Серед введених п'яти логічних операцій алгебри висловлень — диз'юнкції, кон'юнкції, заперечення, імплікації та еквіваленції, в силу відмічених вище властивостей

$$a \to b \equiv \overline{a} \vee b,$$

$$a \leftrightarrow b \equiv (a \to b)(b \to a) \equiv (\overline{a} \vee b)(\overline{b} \vee a),$$

бачимо, що еквіваленцію і імплікацію можна виразити через диз'юнкцію, кон'юнкцію і заперечення. При цьому операції диз'юнкція і кон'юнкція в силу аналогічних подібних для цих операцій властивостей часто називають **двоїстими між собою**. Цю двоїстість можна поширити і на логічні формули довільної складності, якщо вони не містять операцій імплікації та еквіваленції.

Виявляється, що в алгебрі висловлень має місце так званий **принцип (або, говорять, закон) двоїстості**, який має важливе використання для спрощення логічних формул, доведення рівносильностей формул, з'ясування того, до якого класу вони належать, а саме головне — його можна використати і на практиці.

Суть цього принципу двоїстості можна виразити таким твердженням:

Рівносильність логічних формул, які не містять операцій імплікації та еквіваленції, не порушиться, якщо всі операції кон'юнкція і диз'юнкція відповідно замінити на операції диз'юнкція і кон'юнкція, а сталі T, F (тобто 1, 0) — відповідно на F, T (тобто 0, 1).

Іноді цей принцип двоїстості формулюють і так:

Якщо у формулі $\Phi(a, b, ...)$, яка містить висловлювальні змінні чи константи $a, b, ...$ і не містить операцій імплікація та еквіваленція, всі операції кон'юнкція і диз'юнкція замінити відповідно на операції диз'юнкція і кон'юнкція, $a, b, ...$ на $\overline{a}, \overline{b}, ...$ то отримається формула $\Phi^*(\overline{a}, \overline{b}, ...)$, яка рівносильна формулі $\overline{\Phi(a, b, ...)}$, тобто $\overline{\Phi(a, b, ...)} \equiv \Phi^*(\overline{a}, \overline{b}, ...)$.

Покажемо, як застосовується принцип двоїстості до розв'язування задач.

Приклад 1. Спростити формули $\Phi_1 = ab \vee a\overline{b} \vee \overline{a}\overline{b}$, $\Phi_2 = (a \vee b)(a \vee \overline{b})(\overline{a} \vee \overline{b})$.

Розв'язання. В результаті спрощення формули Φ_1 отримаємо: $\Phi_1 = ab \vee a\overline{b} \vee \overline{a}\overline{b} = (ab \vee a\overline{b}) \vee \overline{a}\overline{b} = a(b \vee \overline{b}) \vee \overline{a}\overline{b} \equiv aT \vee \overline{a}\overline{b} \equiv a \vee \overline{a}\overline{b} \equiv (a \vee \overline{a})(a \vee \overline{b}) \equiv T(a \vee \overline{b}) \equiv a \vee \overline{b}$. Формула Φ_1 очевидно двоїста до формули Φ_2. Тому в силу принципу двоїстості маємо $\Phi_2 = (a \vee b)(a \vee \overline{b})(\overline{a} \vee \overline{b}) \equiv a\overline{b}$, оскільки формули $a \vee \overline{b}$ і $a\overline{b}$ взаємно двоїсті.

Приклад 2. Довести, що формула $\Phi = \overline{(\overline{a} \vee \overline{b})(\overline{a} \vee b)(a \vee b)(a \vee \overline{b})}$ тотожно істинна.

Розв'язання. Використавши принцип двоїстості, отримаємо $\Phi = \overline{(\overline{a} \vee \overline{b})(\overline{a} \vee b)(a \vee b)(a \vee \overline{b})} \equiv ab \vee a\overline{b} \vee \overline{a}\overline{b} \vee \overline{a}b \equiv (ab \vee a\overline{b}) \vee (\overline{a}\overline{b} \vee \overline{a}b) \equiv a(b \vee \overline{b}) \vee \overline{a}(\overline{b} \vee b) \equiv aT \vee \overline{a}T \equiv a \vee \overline{a} \equiv T$, що вказує на тотожну істинність формули Φ.

1.6 Питання для самоперевірки засвоєння знань та вправи

1. Що таке формальна логіка?
2. Кого вважають творцем формальної логіки?
3. У зв'язку з якими ідеями відбувся прогрес у розвитку формальної логіки?
4. Які ідеї висловлював Г. Лейбніц для розвитку логіки?
5. Коли виникла алгебра висловлень? Хто вперше її створив?
6. Що таке математична логіка? Які математики внесли вклад в розвиток математичної логіки?
7. Чому математичну логіку вважають і математикою логіки, і логікою математики?
8. Назвіть приклади галузей знань та приклади з практичної діяльності людства відносно застосувань математичної логіки.
9. Яке одне із головних завдань математичної логіки щодо її застосувань до математики?
10. Як називають елементарну частину математичної логіки?
11. Що є основним об'єктом дослідження в алгебрі висловлень?
12. Які є підстави називати логіку висловлень алгеброю висловлень?
13. Що розуміють під висловленням в алгебрі висловлень?
14. Назвіть приклади розповідних речень, які не відносять до висловлень.
15. Як позначаються висловлення та відповідні їм істинносні значення?
16. Які істинності значення можуть мати висловлення та як вони позначаються?

17. Які висловлення називаються рівносильними між собою?
18. Як символічно можна записати рівносильність двох висловлень та дати відповідне означення їх рівносильності?
19. Які висловлення називають простими, елементарними?
20. Які висловлення називаються складними?
21. Наведіть приклади простих і складних висловлень.
22. Які логічні зв'язки вживаються для утворення складних висловлень?
23. Наведіть приклади складних висловлень з використанням різних логічних зв'язків.
24. З якою метою вводять логічні операції в алгебрі висловлень?
25. Які ви знаєте основні логічні операції, які вводяться в алгебрі висловлень?
26. Як позначаються основні логічні операції в алгебрі висловлень?
27. Чому логічна операція заперечення називається унарною, а інші основні логічні операції — бінарними?
28. Що таке висловлювальна змінна, як вона позначається та які значення вона може приймати?
29. Що називається кон'юнкцією двох висловлень та який вигляд має відповідна таблиця істинності для цієї логічної операції?
30. Що називається диз'юнкцією двох висловлень та який вигляд має відповідна таблиця істинності для цієї логічної операції?
31. Що називається імплікацією двох висловлень та який вигляд має відповідна таблиця істинності для цієї логічної операції?
32. Що називається еквіваленцією двох висловлень та який вигляд має відповідна таблиця істинності для цієї логічної операції?

33. Що називається запереченням висловлення та який вигляд має відповідна таблиця істинності для цієї логічної операції?

34. Як по-іншому називають кон'юнкцію двох висловлень та як в зв'язку з цим символічно її позначають?

35. Як по-іншому називають диз'юнкцію двох висловлень?

36. Чому операція диз'юнкція відповідає сполучнику „або“ в нероздільному смислі?

37. Що таке роздільна диз'юнкція двох висловлень та як вона називається?

38. Який вигляд має таблиця істинності для роздільної диз'юнкції та якому сполучнику вона відповідає?

39. Чому логічна імплікація як бінарна операція алгебри висловлень не завжди відповідає тому змісту, який вкладається при вживанні умовного твердження в побутовій мові?

40. Що таке логічна формула в алгебрі висловлень?

41. Яку роль відіграють дужки (,), що вживаються в алгебрі висловлень при побудові логічних формул?

42. Як можна зменшити кількість дужок (,) при конструюванні логічної формули в алгебрі висловлень?

43. Якого порядку виконання логічних операцій дотримуються при конструюванні логічних формул в алгебрі висловлень?

44. Що таке таблиця істинності логічної формули та з якою метою вона складається?

45. Як будується таблиця істинності логічної формули та який порядок її заповнення?

46. Які логічні формули називають рівносильними між собою?

47. Як встановити за допомогою відповідних таблиць істинності, чи рівносильні задані логічні формули?

48. Символічно запишіть означення рівносильності двох логічних формул.

49. Що означає спростити логічну формулу?

50. В чому полягає принцип заміни при рівносильних перетвореннях логічних формул?

51. Які є три класи логічних формул, на які розбивається множина всіх формул алгебри висловлень?

52. Яка логічна формула називається тотожно істинною, тобто тавтологією?

53. Яка логічна формула називається тотожно хибною?

54. Яка логічна формула називається нейтральною?

55. Яка логічна формула називається виконуваною?

56. Як за допомогою таблиці істинності вияснити, до якого класу відноситься логічна формула?

57. Дайте символічне означення тотожно істинної формули (тавтології); тотожно хибної формули; нейтральної формули; виконуваної формули.

58. Поясніть суть вживання метасимвола $\Leftrightarrow$ для логічної еквівалентності $A \Leftrightarrow B$ висловлювальних речень A та B.

59. Що означає символічний запис $\models A \leftrightarrow B$? Як по-іншому його можна зобразити, використавши символи математичної логіки?

60. Як за допомогою логічної еквівалентності виразити взаємозв'язок між логічними формулами з різних класів їх рівносильності?

61. Які ви знаєте основні властивості логічних операцій та на якій мові їх можна виразити?

62. Як виражається ідемпотентність кон'юнкції та диз'юнкціїї двох висловлень?

63. Як виражається дистрибутивність кон'юнкції відносно диз'юнкції та дистрибутівність диз'юнкції відносно кон'юнкції висловлень?

64. Поясніть, як можна поширити властивості ідемпотентності, комутативності операцій кон'юнкції, диз'юнкції на довільне число висловлень?

65. В чому полягає закон подвійного заперечення висловлень?

66. Як виражається закон протиріччя та виключення третього для висловлень?

67. Яку роль відіграють константи T і F в операціях кон'юнкції та диз'юнкції з довільними висловленнями?

68. Сформулюйте закони де Моргана для довільних висловлень.

69. Яка роль законів де Моргана в дослідженнях взаємозв'язку логічних операцій для висловлень?

70. Як виражається імплікація висловлень через операції диз'юнкція або кон'юнкція?

71. Як виражається еквіваленція висловлень через інші логічні операції?

72. Як можна перевірити виконання будь-яких властивостей логічних операцій для висловлень?

73. Як можна записати властивості логічних операцій, виражених за допомогою символа „$\equiv$“ рівносильності, використавши інші символи?

74. Чому властивості логічних операцій іноді називають основними логічними законами алгебри висловлень?

75. Як можна за допомогою використання властивостей логічних операцій довести, що дані логічні формули рівносильні між собою.

76. Як можна за допомогою використання властивостей логічних операцій спростити задану логічну формулу?

77. Як можна за допомогою використання властивостей логічних операцій вияснити, до якого з трьох класів належить задана логічна формула?

78. Що слід розуміти під алгеброю висловлень?

79. Які дві логічні операції в алгебрі висловлень називаються двоїстими між собою і чому?

80. В чому полягає принцип двоїстості в алгебрі висловлень? Сформулюйте обидва твердження, що розкривають цей принцип.

81. Поясніть, на чому основана справедливість вказаного вище принципу двоїстості в алгебрі висловлень.

82. Яку роль відіграє принцип двоїстості при його використанні в алгебрі висловлень?

83. Наведіть приклади використання принципу двоїстості для доведення того, що: а) логічні формули рівносильні між собою; б) логічна формула є тавтологією; в) логічна формула є тотожно хибною.

84. Які з наведених речень є висловленнями і чому? Встановити істинносне значення тих речень, які є висловленнями:

    а) $x^2 - 2 > 0$;

    б) $3 \cdot 4 = 8$;

    в) Яка довжина кола?

    г) Трикутник ABC – тупокутний;

    д) 12 ділиться на 4;

    е) $(3 - 4) = 3\sqrt{2}$;

    є) $3 < m$;

    ж) Прочитайте цю книгу;

    з) Я проживаю по вулиці Заболотного або по вулиці Леніна;

    и) Сьогодні дуже холодно.

85. Встановити всі значення змінних, при яких наведені речення будуть істинними висловленнями:

    а) $(x^2+3x+5)^2-x^2-3x-11=0$;

    б) $(x^2-5x+7)^2-(x-2)(x-3)=1$;

    в) $|x^2-12|+x=0$;

    г) $2\sin^2 x-\cos x+1=0$;

    д) $\sqrt{x+2}>x$;

    е) $\dfrac{x^2-5x-14}{|x-3|}\leqslant 0$;

    є) $\sqrt{x-1}<7-x$;

    ж) $ax^2+bx+c=0$;

    з) $\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2=b_2, \end{cases}$ відомо, що $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$.

86. Виділити в заданих складних висловленнях елементарні висловлення та логічні зв'язки:

    а) „Я вивчаю англійську або німецьку мову“;

    б) „Даний паралелограм є прямокутником і ромбом“;

    в) „Якщо на вулиці мороз, то діти одягають пальто і рукавиці або взувають валянки“;

    г) „Трикутник є рівностороннім тоді і тільки тоді, коли всі його кути рівні між собою“;

    д) „Якщо число 18 ділиться на 3, то воно ділиться на 2 і 5“.

87. З елементарних висловлень $a=$„дане число ціле“, $b=$ „дане число додатне“, $c=$„дане число просте“, $d=$„дане число ділиться на 2“ сформулювати складні висловлення, виражені символічно: а) $a\vee b$, б) $a\wedge b$; в) $b\wedge\overline{b}$; г) $c\leftrightarrow\overline{d}$; д) $c\wedge\overline{c}$; е) $ac\to\overline{d}$; є) $ad\to c$; ж) $\overline{a}\vee\overline{d}$; з) $(a\vee b)(c\vee d)$; и) $abc\vee d$.

88. Встановити, які з даних висловлень істинні, а які хибні:

    а) „Якщо 13 ділиться на 8, то 13 ділиться на 5“;

    б) „Якщо 12 ділиться на 5, то 12 ділиться на 4“;

в) „Якщо 8 ділиться на 2, то 8 ділиться на 6“;

г) „Якщо 12 ділиться на 3, то 12 ділиться на 2“;

е) „12 ділиться на 4 тоді і тільки тоді, коли 12 ділиться на 3“;

є) „13 ділиться на 8 тоді і тільки тоді, коли 15 ділиться на 5“.

89. З'ясувати, які з наступних виразів є логічними формулами алгебри висловлень“:

а) $((a \wedge b) \vee (b \to c)) \to \overline{d}$;

б) $\overline{a \vee b} \to ab$;

в) $(a\wedge \to c) \vee \overline{d}$;

г) $((a \vee \overline{\overline{c}})b \wedge \wedge d) \to \overline{c}$;

д) $(a \to b) \to (\overline{b} \to \overline{a})$;

е) $(a \to \overline{b}) \to (b \to \overline{a})c$.

90. Опустити дужки в наступних логічних формулах:

а) $((((a \vee \overline{b}) \to (c \wedge d))) \to (a \vee b))$;

б) $((\rceil a) \to (((b \wedge c) \wedge (\rceil d)) \vee (b \vee c)))$;

в) $((\rceil a) \leftrightarrow (((b \wedge c) \wedge (\rceil d)) \leftrightarrow (b \vee c)))$;

г) $((\rceil a)((b \to c) \to (d \to (a \vee (\rceil d)))))$.

91. Скласти таблиці істинності для таких логічних формул:

а) $(\overline{a} \to b) \vee \overline{ab}$;

б) $\overline{a \vee b} \to (a \leftrightarrow \overline{c})$;

в) $ab \to a \vee b$;

г) $(a \to b)(b \to c) \to (a \to c)$;

д) $a \to (b \to c)$;

е) $(a \to b)a \to a \vee b$;

є) $a(a \vee \overline{b}) \leftrightarrow \overline{a}$;

ж) $(a \to b)(b \to c) \to (a \to bc)$.

92. Встановити, до якого класу належать такі логічні формули:
    - а) $(a \to b) \to (ab \to bc)$;
    - б) $(a \to b) \to (a \vee c \to b \vee c)$;
    - в) $(ab \to c) \leftrightarrow (a \to (b \to c))$;
    - г) $((a \vee b) \leftrightarrow c) \leftrightarrow (a \to b)$;
    - д) $\overline{\overline{p}q(p \vee q)}$;
    - е) $(p \to q)(p \to r) \leftrightarrow (p \to r)$;
    - є) $(a \to (b \to c)) \to ((a \to b) \to (a \to c))$;
    - ж) $(a \to b) \to ((c \to b) \to (ac \to b))$.

93. З'ясувати, які з наступних логічних формул рівносильні між собою: а) $\overline{ab}$; б) $\overline{a}\overline{b}$; в) $\overline{a}b$; г) $a\overline{b}$; д) $\overline{a}\vee\overline{b}$; е) $\overline{a \vee b}$; є) $\overline{a \vee \overline{b}}$; ж) $\overline{\overline{\overline{a}} \vee b}$.

94. Довести такі рівносильності логічних формул:
    - а) $ab \vee \overline{b} \equiv b \to a$;
    - б) $(a \vee b)(a \vee c)(a \vee d) \equiv a \vee bcd$;
    - в) $ab \to c \equiv a \to (b \to c)$;
    - г) $a \to bc \equiv (a \to b)(a \to c)$;
    - д) $ab \to c \equiv (a \to c) \vee (b \to c)$;
    - е) $ab \vee \overline{a}\overline{b} \equiv (a \vee \overline{b})(\overline{a} \vee b)$;
    - є) $(a \leftrightarrow b) \leftrightarrow c \equiv a \leftrightarrow (b \leftrightarrow c)$;
    - ж) $a \to b \equiv a \to (a \to b)$;
    - з) $a \to (b \to c) \equiv \overline{a} \vee \overline{b} \vee c$;
    - и) $a(\overline{a} \vee b) \vee b \equiv b$;
    - і) $((a \to b) \to a) \to a \equiv T$;
    - ї) $a\overline{b} \vee \overline{a}b \equiv (a \vee b)(\overline{a} \vee \overline{b})$.

95. Показати, що роздільну диз'юнкцію („роздільне або") $a \sqcup b$ можна виразити логічною формулою $a \sqcup b \equiv a \leftrightarrow \overline{b}$.

96. Спростити наступні логічні формули:

а) $(a \vee \overline{b})(a \vee b)$;

б) $abc \vee a\overline{b} \vee ab\overline{c}$;

в) $a\overline{b} \vee a\overline{c} \vee b \vee c \vee bc$;

г) $abc \vee \overline{a}bc$;

д) $(a \vee b \vee \overline{c})(a \vee b \vee c)$;

е) $abc \vee a\overline{b}\overline{c}$;

є) $(\overline{a} \vee \overline{b} \vee \overline{c})(\overline{a} \vee bc)$;

ж) $(\overline{\overline{a}\overline{b}} \vee \overline{a})(\overline{a \vee \overline{\overline{a}b}})$;

з) $(\overline{ab} \vee \overline{a}bc)(\overline{a} \vee \overline{ab \vee \overline{b}})$;

и) $abc \vee a\overline{bc} \vee abc \vee a\overline{b}$;

і) $(\overline{a \to b \vee c})(\overline{a\overline{c}})$;

ї) $(\overline{ab \vee a})(\overline{a(\overline{a} \vee b) \to b})$;

й) $\overline{ab} \vee \overline{\overline{a}b} \vee (a \to b)$;

к) $ab \vee ac \vee \overline{a}c \vee a\overline{b} \vee c$;

л) $\overline{ab} \vee \overline{a \vee b \to b \vee a}$;

м) $\overline{a \to b} \to b \vee (\overline{a \vee c \to b \vee c})$;

н) $(a \to b) \leftrightarrow (\overline{a \vee b})$;

о) $\overline{\overline{a}b \leftrightarrow (a \to b)}$;

п) $\overline{abc \to b} \to \overline{ab}$;

р) $\overline{a \to (b \to \overline{ab})} \to b$;

с) $(a \to b)b \vee (\overline{b} \to a) \vee a\overline{b}$;

т) $(a \to b)(\overline{b} \to a) \to (a \to (b \to \overline{a}))$.

97. Довести, що наступні формули тотожно істинні:

а) $ab \to a$;

б) $a \to a \vee b$;

в) $a \to (b \to a)$;

г) $(a \to (b \to c)) \to ((a \to b) \to (a \to c))$;

д) $(a \to c) \to ((b \to c) \to (a \vee b \to c))$;

е) $(a \to b) \to ((a \to c) \to (a \to bc))$.

98. Для кожного значення параметра розв'яжіть рівняння:

    а) $\dfrac{x+b}{(x+1)(x-4)} = 0$;

    б) $\dfrac{x+2b}{(x-b+1)x} = 0$;

    в) $\dfrac{(x+2b)(x-3)}{x-b} = 0$.

99. **Штрихом Шеффера** (або несумісністю) двох висловлень a і b називається таке висловлення $a|b$ (читається „a несумісно з b“), яке хибне в тому і тільки в тому випадку, коли висловлення a, b одночасно істинні. Виразити штрих Шеффера через основні логічні операції над висловленнями і показати, що всі логічні операції можна виразити через цей штрих Шеффера.

100. Довести, що основні логічні операції ($\wedge$, $\vee$, заперечення, $\to$, $\leftrightarrow$) можна виразити через заперечення і а) кон'юнкцію, б) диз'юнкцію, в) імплікацію.

101. **Символом Лукасевича** двох висловлень a і b називається таке висловлення $a \downarrow b$ (читається „ні a, ні b“), яке істинне лише в тому випадку, коли висловлення a і b одночасно хибні. Виразити символ Лукасевича через основні логічні операції над висловленнями і показати, що всі основні логічні операції можна виразити через цей символ Лукасевича.

102. У спортивному клубі такі правила: а) члени волейбольної секції зобов'язані відвідувати секцію плавання; б) не можна одночасно бути членом шахової секції та секції плавання, не приймаючи участі у волейбольній секції; в) жоден член шахової секції не має права відвідувати волейбольну секцію. Спростити перелічені правила.

103. При складанні розкладу занять на понеділок були висловлені такі побажання: а) геометрія — на першу або другу пару; б) алгебра — на першу або третю пару; в) фізкультура — на

другу або третю пару. Чи можливо задовольнити одночасно всі три побажання?

104. Трьох студентів А, Б, С звинувачують у тому, що вони причетні до того, що в лабораторії зіпсували прилад. Обвинувачені дали такі свідчення:
А: „Б винний, а С невинний“;
С: „Я невинний, але хоча би один з А або Б винний“;
Б: „А невинний або С винний“.
Чи сумісні ці свідчення? Припустивши, що всі свідчення правдиві, з'ясувати, хто з трьох студентів винен.

105. Чотирьох осіб А, Б, В, Г, яких запідозрили в розкраданні майна, затримала міліція. На допиті вони дали наступні свідчення:
А: „Це зробив Б“;
Б: „Це зробив Г“;
В: „Це не я зробив“;
Г: „Б бреше, говорячи, що це зробив я“.
Додаткове розслідування показало, що правду сказав лише один з них. Вияснити, хто здійснив злочин і хто сказав правду.

106. На екзамені викладач пропонує студенту з'ясувати, які з вказаних п'яти висловлень істинні, а які хибні. Студент знає, що викладач завжди дає більше істинних висловлень, ніж хибних, і ніколи не задає три висловлення підряд, які вимагають однакової відповіді. По змісту першого і останнього висловлень йому ясно, що відповіді на них повинні бути протилежними. Єдине висловлення, відповідь на яке він знає — це друге, що гарантує йому вірні відповіді до всіх п'яти висловлень. Якими повинні бути відповіді студента?

107. * Встановити[1], скільки існує всіх бінарних логічних операцій, через які можна виразити всі основні логічні операції (дві з них Вам уже відомі — це штрих Шеффера і символ Лукасевича).

---

[1] Вправи, відмічені зірочкою, є значно важчими, складнішими для розв'язання, а деякі з них можуть носити навіть характер проблем.

108. Є три учасники А, Б, В такої гри. В одній із двох шухляд схована певна річ, і біля кожної з цих шухляд є по одному учаснику: біля першої шухляди учасник А, а біля другої – учасник Б. Обидва учасники А і Б знають, в якій із цих двох шухляд схована річ, але один з них говорить лише правду, а другий лише неправду. Учасник В про це знає. Йому пропонується задати лише одне запитання одному з учасників А, Б таке, щоб з отриманої відповіді у вигляді „так“ чи „ні“ він зміг би дізнатися, в якій же шухляді міститься схована річ. Як учаснику В сформулювати питання, щоб справитися з поставленим завданням?

109. В одній з газетних заміток розповідається про злодійства групи злодіїв. Спростити одне із висловлень, яке розміщено в повідомленні. „... злодії не відчували би себе так упевнено, якби правоохоронці не відмічали, що слідів злодійства на об'єктах ... не виявлено ...“.

1.7 Відповіді та вказівки до розв'язання деяких вправ

№ 84.

б), е) — хибні висловлення, д) — істинне висловлення, а), г), є), з), и) — висловлення, істинносне значення яких залежить від додаткових умов.

№ 85.

а) $\{-1;-2\}$, б) $\{2;3\}$, в $\{-4;-3\}$, г) $\{2k\pi|k \in Z\}$, д) $[-2;2)$, е) $[-2;3) \cup (3;7]$, є) $[1;5)$.

№ 86.

a=„Я вивчаю англійську мову“; b=„Я вивчаю німецьку мову“; логічна зв'язка „або“;

д) a=„$18\vdots 3$“; b=„$18\vdots 2$“; c=„$18\vdots 5$“; логічні зв'язки „якщо ... то“, „і“.

№ 87.

а) $a \vee b$=„дане число ціле або додатне“;

е) $ac \to \overline{d}$=„якщо дане число ціле і просте то воно не ділиться на 2“; и) $abc \vee d$=„дане число ціле, просте і додатне або ділиться на 2“.

№ 88.

Істинні: а), б), г), е); хибні: б), є).

№ 89. а), в), д), е).

№ 90.

а) $a \vee \overline{b} \to cd \to a \vee b$;

б) $\overline{a} \to bc\overline{d} \vee b \vee c$;

в) $\overline{a} \leftrightarrow (bc\overline{d} \leftrightarrow b \vee c)$;

г) $\overline{a}(b \to c \to (d \to a \vee \overline{d}))$.

№ 92.

Істинні: б), в), є), ж); нейтральні а), г), д), е).

№ 93.

а) рівносильно д); б) рівносильно е) і рівносильно ж); в) рівносильно є).

№ 94.

Вказівка. Рівносильність формул можна довести шляхом складання їх таблиць істинності або шляхом рівносильних перетворень цих формул, використавши властивості логічних операцій. Застосувавши рівносильні перетворення, отримаємо, наприклад, такі доведення для рівносильностей а), г), ж), і):

а) $ab \vee \overline{b} \equiv (a \vee \overline{b})(b \vee \overline{b}) \equiv (a \vee \overline{b})T \equiv a \vee \overline{b} \equiv \overline{b} \vee a \equiv b \to a$;

г) $a \to bc \equiv (\overline{a} \vee bc) \equiv (\overline{a} \vee b)(\overline{a} \vee c) \equiv (a \to b)(a \to c)$;

ж) $a \to b \equiv \overline{a} \vee b \equiv (\overline{a} \vee \overline{a}) \vee b \equiv \overline{a} \vee (\overline{a} \vee b) \equiv \overline{a} \vee (a \to b) \equiv a \to$ $\to (a \to b)$;

і) $((a \to b) \to a) \to a \equiv \overline{(a \to b) \to a} \vee a \equiv \overline{\overline{a \to b} \vee a} \vee a \equiv (\overline{\overline{a \to b}} \wedge$ $\wedge\, \overline{a}) \vee a \equiv ((a \to b) \wedge \overline{a}) \vee a \equiv (\overline{a} \vee b)\overline{a} \vee a \equiv \overline{a}\,\overline{a} \vee b\overline{a} \equiv a \equiv (\overline{a} \vee a) \vee$ $\vee\, b\overline{a} \equiv T \vee b\overline{a} \equiv T$.

№ 95.

Вказівка. Порівняти таблиці істинності формул $a \sqcup b$, $a \leftrightarrow \overline{b}$.

№ 96.

а) a; б) a; в) $a \vee b \vee c$; г) bc; д) $a \vee b$; е) $a(bc \vee \overline{b}\overline{c})$; є) $\overline{a}$; ж) $\overline{a}b$; з) $\overline{a}$; и) a; і) F; ї) F; й) T; к) $a \vee c$; л) $a \to \overline{b}$; м) $ac \to b$; н) $\overline{b}$; о) $b \leftrightarrow a$; п) T; р) T; с) $a \vee b$; т) $\overline{ab}$.

№ 97.

Вказівка. Доведення можна провести методом складання таблиць істинності або методом спрощення. Метод спрощення для формул а), в), д) має такий вигляд:

а) $ab \to a \equiv \overline{ab} \vee a \equiv (\overline{a} \vee \overline{b}) \vee a \equiv \overline{a} \vee (a \vee \overline{b}) \equiv (\overline{a} \vee a) \vee \overline{b} \equiv T \vee \overline{b} \equiv T$;

в) $a \to (b \to a) \equiv \overline{a} \vee (b \to a) \equiv \overline{a} \vee (\overline{b} \vee a) \equiv (\overline{b} \vee a) \vee \overline{a} \equiv \overline{b} \vee (a \vee$ $\vee\, \overline{a}) \equiv \overline{b} \vee T \equiv T$;

д) $(a \to c) \to ((b \to c) \to (a \vee b \to c)) \equiv \overline{a \to c} \vee (\overline{b \to c} \vee (\overline{a \vee b \vee}$ $\overline{\vee c})) \equiv \overline{\overline{a} \vee c} \vee (\overline{\overline{b} \vee c} \vee (\overline{a}\overline{b} \vee c)) \equiv \overline{\overline{a}} \wedge \overline{c} \vee (\overline{\overline{b}}\overline{c} \vee (\overline{a}\overline{b} \vee c)) \equiv a\overline{c} \vee b\overline{c} \vee \overline{a}\overline{b} \vee c \equiv (a \vee$ $\vee\, b)\overline{c} \vee c \vee \overline{a}\overline{b} \equiv (a \vee b \vee c)(\overline{c} \vee c) \vee \overline{a}\overline{b} \equiv (a \vee b \vee c)T \vee \overline{a}\overline{b} \equiv (a \vee b \vee c) \vee$ $\vee\, \overline{a}\overline{b} \equiv (a \vee b \vee c \vee \overline{a})(a \vee b \vee c \vee \overline{b}) \equiv ((a \vee \overline{a}) \vee (b \vee c))((a \vee c) \vee (b \vee \overline{b})) \equiv$ $\equiv (T \vee (b \vee c))((a \vee c) \vee T) \equiv T \wedge T \equiv T$.

№ 99.

$a|b \equiv \overline{ab}$; $\overline{a} \equiv a|a$; $ab \equiv (a|b)|(a|b)$; $a \vee b \equiv (a|a)|(b|b)$; $a \to b \equiv$ $\equiv ((a|a)|(a|a))|(b|b)$; $a \leftrightarrow b \equiv ((((a|a)|(a|a))|(b|b))|(((b|b)|(b|b))|(a|a)))|$ $|((((a|a)|(a|a))|(b|b))|(((b|b)|(b|b))|(a|a)))$.

№ 100.

а) заперечення, $\wedge$: $a \wedge b$; $a \vee b \equiv \overline{\overline{a} \wedge \overline{b}}$; $a \to b \equiv \overline{a \wedge \overline{b}}$; $a \leftrightarrow b \equiv$ $\equiv (\overline{a \wedge \overline{b}})(\overline{b \wedge \overline{a}})$.

б) заперечення: $\vee$. $a \vee b$; $a \wedge b \equiv \overline{\overline{a} \vee \overline{b}}$; $a \to b \equiv \overline{a \vee \overline{b}}$; $a \leftrightarrow b \equiv$ $\equiv \overline{(\overline{\overline{a} \vee b}) \vee (\overline{\overline{a} \vee b})}$.

в) заперечення: $\to$. $a \wedge b \equiv \overline{a \to \overline{b}}$; $a \vee b \equiv \overline{a} \to b$; $a \leftrightarrow b \equiv \overline{(a \to b) \to (\overline{b \to a})}$

№ 101.

$a \downarrow b \equiv \overline{a \vee b}$; $\overline{a} \equiv a \downarrow a$; $ab \equiv (a \downarrow a) \downarrow (b \downarrow b)$; $a \vee b \equiv (a \downarrow b) \downarrow (a \downarrow b)$; $a \to b \equiv ((a \downarrow a) \downarrow b) \downarrow ((a \downarrow a) \downarrow b)$; $a \leftrightarrow b \equiv ((((a \downarrow a) \downarrow b) \downarrow ((a \downarrow a) \downarrow b)) \downarrow (((a \downarrow a) \downarrow b) \downarrow ((a \downarrow a) \downarrow b))) \downarrow ((((b \downarrow b) \downarrow a) \downarrow ((b \downarrow b) \downarrow a)) \downarrow (((b \downarrow b) \downarrow a) \downarrow ((b \downarrow b) \downarrow a)))$.

№ 102.

Члени шахової секції не мають права відвідувати ні волейбольну секцію ні секцію плавання, а члени волейбольної секції зобов'язані відвідувати секцію плавання. **Вказівка**. Розглянути такі прості висловлення: V=„Член клубу відвідує волейбольну секцію“; S=„Член клубу відвідує секцію плавання“; Sh=„Член клубу відвідує шахову секцію“. Тоді згідно умови отримаємо три висловлення а) $V \to S$; б) $Sh \wedge S \to V$; в) $Sh \to \overline{V}$, з яких слід скласти кон'юнкцію та спростити її.

№ 103.

Задовольнити можна двома способами: а) алгебра — на першу пару, геометрія — на другу пару, фізкультура на третю пару; б) геометрія — на першу пару, фізкультура — на другу пару, алгебра на третю пару. **Вказівка.** Ввести позначення для висловлень: A_i=„алгебра на i-ту пару“, G_i=„геометрія на i-ту пару“, F_i=„фізкультура на i-ту пару“, де $i = 1, 2, 3$. У результаті отримаємо логічну формулу $(G_1 \vee G_2)(A_1 \vee A_3)(F_2 \vee F_3)$, яка очевидно рівносильна формулі $A_1G_2F_3 \vee G_1F_2A_3$.

№ 104.

Свідчення сумісні; винним є студент B. **Вказівка.** Ввести позначення виду x=„студент X винен“. В результаті дослідити формулу $\Phi = (B\overline{C})(\overline{C}(A \vee B))(\overline{A} \vee C)$.

№ 105.

Правду сказав Г, а злочин здійснив В.

№ 106.

Ввести позначення B_i=„i-та відповідь правильна“. Тоді студент може дати такий єдиний варіант правильних відповідей: $B_1\overline{B_2}B_3B_4\overline{B_5}$.

№ 108.

Один із варіантів формулювання запитання учасника В: „Чи є істиною те, що у шухляді, біля якої ти стоїш, знаходиться предмет, еквівалентно тому, що ти завжди говориш правду?“ При відповіді „Так!“ в шухляді є предмет, а при відповіді „Ні!“ — нема.

2 Застосування логічних законів алгебри висловлень до формулювання та доведення математичних тверджень

1. Деякі логічні закони та їх застосування в математиці.

2. Логічне слідування; умова і висновок теореми; прості та складні теореми.

3. Група взаємно спряжених висловлень; пряма і обернена теореми та протилежні до них теореми; критеріальна теорема.

4. Необхідні та достатні умови.

5. Прямі та непрямі методи доведення теорем; метод доведення від супротивного.

6. Питання для самоперевірки засвоєння знань та вправ.

7. Відповіді та вказівки до розв'язання деяких вправ.

2.1 Деякі логічні закони та їх застосування в математиці

1. Як уже відмічалося в попередній темі, алгебра висловлень має широкі застосування як в різних галузях знань, так і в практичній діяльності людства. В даній темі зупинимося лише на розгляді одного із застосувань алгебри висловлень — це використання деяких її логічних законів в математиці при формулюванні та доведенні математичних теорем, тверджень.

Серед логічних формул алгебри висловлень особливу роль відіграють тотожно істинні та тотожно хибні формули. Оскільки між тотожно істинними і тотожно хибними формулами існує тісний взаємозв'язок, який відмічався раніше у вигляді логічних еквівалентностей

$$\Phi \equiv T \Leftrightarrow \overline{\Phi} \equiv F;$$

$$\Phi \equiv F \Leftrightarrow \overline{\Phi} \equiv T,$$

де Φ — логічна формула, то досить, наприклад, досліджувати лише тотожно істинні формули (**тавтології**).

Саме тавтології є джерелом утворення так званих **логічних законів** алгебри висловлень. Важливість цих законів полягає в тому, що за допомогою них встановлюються правила утворення правильних умовиводів, правильних форм міркувань, які не залежать ні від конкретних висловлень, ні від їх змістових істинносних значень. Саме за допомогою них здійснюють доведення тих чи інших математичних тверджень (тобто встановлюють їх істинність на основі істинності інших відомих чи заданих тверджень).

2. Безперечно, що серед тавтологій алгебри висловлень можна відібрати різними способами ту чи іншу сукупність тотожно істинних формул і назвати їх логічними законами. Як правило, намагаються вибрати із тавтологій і назвати їх логічними законами такі тавтології, які найчастіше використовуються для встановлення правильних форм умовиводів, міркувань при доведенні математичних тверджень, які не залежать від конкретних висловлень і носять загальний характер.

Про логічні закони можна висловити і таку думку: **логічний закон — це по суті логічна схема доведення того чи іншого твердження, це план побудови алгоритму отримання істинного результату на основі певних даних.**

3. Наведемо нижче деякі з найбільш використовуваних логічних законів.

1. **Закон тотожності**: $\models (a \to a)$. Довільне висловлення є логічним наслідком самого себе. До речі, цей закон став однією з крилатих фраз відомого українського політика: „Маємо те, що маємо“.

2. **Закон подвійного заперечення**: $\models (\overline{\overline{a}} \leftrightarrow a)$, або те ж саме, що $(\overline{\overline{a}} \equiv a)$ чи $(\overline{\overline{a}} \Leftrightarrow a)$. Заперечення заперечення висловлення рівносильне самому висловленню.

3. **Закон протиріччя:** $\models \overline{(a \wedge \overline{a})}$. Неправильно є те, що одночасно істинні два протилежних висловлення. Наприклад, „неправильно, що дане натуральне число ділиться на 9 і не ділиться на 9“. Цей закон, відмітимо, надзвичайно важливий в теоретичних розробках. Адже якщо вдалося встановити, що мають місце два висловлення, які суперечать одне одному, то таке дослідження містить протиріччя і його слід відкинути.

4. **Закон виключення третього:** $\models (a \vee \overline{a})$. Завжди має місце дане висловлення або його заперечення. Наприклад, „число $2^{2007}+5$ ділиться на 33 або не ділиться на 33" — істинне висловлення, хоча в даній ситуації ми не знаємо, істинне чи хибне висловлення „число $2^{2007}+5$ ділиться на 33" або його заперечення.

5. **Закон силогізму:** $\models (a \to\ b) \wedge (b \to\ c) \to (a \to\ c)$. Якщо з першого висловлення слідує друге, а з другого — третє, то з першого слідує третє. Даний закон дає можливість при доведенні тверджень використовувати ланцюжки висновків довільної довжини. Наприклад, легко доводиться справедливість імплікації „якщо при діленні на 9 натуральне число дає остачу 1, то і квадрат цього числа при діленні на 9 дає остачу 1". Використавши кілька разів закон силогізму, неважко довести справедливість імплікації, „якщо натуральне число n при діленні на 9 дає остачу 1, то і n^{32} при діленні на 9 дає остачу 1".

6. **Закон контрапозиції:** $\models ((a \to b) \to (\overline{b} \to \overline{a}))$. Якщо з умови a випливає наслідок b, то заперечення $\overline{a}$ цієї умови є наслідком заперечення $\overline{b}$"). Цей закон застосовується при розгляді прямої теореми і оберненої до протилежної теореми (відповідні терміни див. далі). В підтвердження використання цього закону контрапозиції наведемо таке міркування: „відомо, що натуральне число має останню цифру нуль, якщо воно ділиться на 2 і на 5; тому якщо натуральне число не має останньої цифри нуль в своєму записі, то неправильно, що воно ділиться на 2 і на 5". Істинність цього міркування ґрунтується на застосуванні закону контрапозиції.

7. **Modus ponens (стверджувальний модус):** $\models (a \wedge (a \to\ \to b) \to b)$. З істинності імплікації та її умови випливає висновок. Даний закон широко застосовується в логічних міркуваннях, в різноманітних доведеннях. Наприклад, в міркуваннях виду „просте число, яке більше за 2, непарне; 11 є просте число, яке більше за 2; тому 11 — непарне число" використано закон modus ponens.

8. **Modus tollens (заперечувальний модус):** $\models (\bar{b} \wedge (a \to b) \to \to \bar{a})$. З істинності імплікації та хибності її висновку випливає хибність її умови. Даний закон широко використовується в схемах доведення від супротивного. Наприклад, у міркуваннях виду „якщо сума цифр натурального числа ділиться на 9, то і число ділиться на 9; число 20576 не ділиться на 9; тому сума цифр цього числа 20576 не ділиться на 9“ використано закон modus tollens.

4. Доведення того, що всі наведені вище вісім логічних законів є справді тавтологіями, тобто тотожно істинними формулами, можна провести за допомогою складання відповідних їм таблиць істинності або за допомогою властивостей логічних операцій можна спростити ці закони до формули виду T (істина). Покажемо, наприклад, для заперечувального модуса, що $(\bar{b} \wedge (a \to b)) \to \bar{a} \equiv \equiv T$. Дійсно, застосувавши властивості логічних операцій, отримаємо: $(\bar{b} \wedge (a \to b)) \to \bar{a} \equiv \overline{\bar{b} \wedge (\bar{a} \vee b)} \vee \bar{a} \equiv (\bar{\bar{\bar{b}}} \vee \overline{\bar{a} \vee b}) \vee \bar{a} \equiv (b \vee \vee \bar{\bar{a}}\bar{b}) \vee \bar{a} \equiv (b \vee a\bar{b}) \vee \bar{a} \equiv (a\bar{b} \vee b) \vee \bar{a} \equiv a\bar{b} \vee (b \vee \bar{a}) \equiv (a \vee b \vee \bar{a})(\bar{b} \vee b \vee \vee \bar{a}) \equiv ((a \vee \bar{a}) \vee b)((\bar{b} \vee b) \vee \bar{a}) \equiv (T \vee b)(T \vee \bar{a}) \equiv TT \equiv T$, що і треба було показати.

2.2 Логічне слідування; умова і висновок теореми; прості та складні теореми

1. В попередній темі нами розглядався взаємозв'язок між логічними формулами, який спочатку був введений у вигляді рівносильності $\Phi_1 \equiv \Phi_2$ логічних формул Φ_1 і Φ_2. Для зручності формулювань різноманітних тверджень нами був введений на сторінці 31 метасимвол $\Leftrightarrow$, який був названий **логічною еквівалентністю**. Запис виду $A \Leftrightarrow B$ вказує на зв'язок між висловлювальними реченнями A, B, який означає логічну еквівалентність між A та B як певну теорему, істинносний смисл якої означає, що еквіваленція $A \leftrightarrow B$ істинна, тобто $A \leftrightarrow B \equiv T$ або $\models (A \leftrightarrow B)$, що можна виразити і у вигляді звичайної рівносильності $A \equiv B$, яка має місце для A і B.

2. Поряд з логічною еквівалентністю як зв'язок між логічними формулами вводиться і так зване **логічне слідування** між ними. Відповідний метасимвол, що вживається для логічного слідування, має такий вигляд: $\Rightarrow$. Відповідне означення його таке: **з формули Φ_1 логічно слідує формула Φ_2 або, що теж саме, формула Φ_2 є логічним наслідком формули Φ_1, якщо імплікація $\Phi_1 \to \Phi_2$ є тавтологією.**

Символічно логічне слідування формул можна подати так: $(\Phi_1 \Rightarrow \Phi_2) \overset{df}{\Longleftrightarrow} \Phi_2$ є наслідком $\Phi_1 \overset{df}{\Longleftrightarrow} \models (\Phi_1 \to \Phi_2) \Leftrightarrow (\Phi_1 \to \to \Phi_2) \equiv T$.

Між логічною еквівалентністю, рівносильністю та логічним слідуванням логічних формул існує тісний взаємозв'язок, який виражається символічно у такій формі:

$$\Phi_1 \Rightarrow \Phi_2 \text{ і } \Phi_2 \Rightarrow \Phi_1 \text{ тоді і тільки тоді, коли } \Phi_1 \Leftrightarrow \Phi_2;$$
$$\Phi_1 \Rightarrow \Phi_2 \text{ і } \Phi_2 \Rightarrow \Phi_1 \text{ тоді і тільки тоді, коли } \Phi_1 \equiv \Phi_2.$$

3. Відомо, що вивчення, дослідження того чи іншого розділу математики на аксіоматичній основі розпочинається з розгляду бази даної математичної теорії. В цю базу входять первісні, тобто початкові, неозначувані поняття про об'єкти теорії та деякі зв'язки між ними. Крім того, дається перелік аксіом (тверджень про ці поняття та зв'язки між ними). Ці аксіоми приймають без доведення, і по суті вони є неявними означеннями первісних понять та зв'язків між ними. Після введення бази теорії починаємо будувати саму теорію. З цією метою розглядаються нові, більш складніші поняття на основі первісних і досліджуються їх властивості, вводяться певні твердження про них. Істинність чи хибність цих тверджень, висловлень встановлюється за допомогою аксіом, попередньо встановлених істинних висловлень та за допомогою логічних законів. Такі твердження, істинність яких встановлена указаним вище чином, називаються **теоремами даної математичної теорії**.

Означення 2.2.1. *Теорема — це таке твердження, істинність якого логічно випливає з аксіом, які приймаються без доведення, раніше доведених теорем та використання правильних форм міркувань, тобто логічних законів.*

Означення 2.2.2. *Доведення теореми — це, по суті, скінченна послідовність аксіом теорії, раніше доведених теорем та логічних* *законів, що зв'язують їх; кінець цієї послідовності — це висновок про теорему.*

4. Кожну теорему, як правило, можна подати у вигляді істинної імплікації, що зв'язує два висловлення. Це символічно можна зобразити записом $\models (\varphi \to \psi)$, де висловлення φ називається **умовою теореми**, а висловлення ψ — її **логічним висновком**. Використавши введене вище поняття логічного слідування, символічний запис теореми можна подати у формі $\varphi \Rightarrow \psi$ логічного слідування наслідку ψ з умови φ.

Наприклад, теорему „Діагоналі ромба взаємно перпендикулярні“ можна перефразувати так: „Якщо паралелограм — ромб, то його діагоналі взаємно перпендикулярні“. Позначивши умову даної теореми через $\varphi =$„Паралелограм — ромб“, а логічний висновок через $\psi =$„Діагоналі цього паралелограма взаємно перпендикулярні“, отримаємо символічний запис цієї теореми у вигляді логічного слідування $\varphi \Rightarrow \psi$.

Очевидно, що доведення теореми $\models (\varphi \to \psi)$ полягатиме в тому, що потрібно показати справедливість такої рівносильності: $(\varphi \to \to \psi) \equiv T$.

5. Теореми можна умовно поділити на **прості** і **складні**.

Означення 2.2.3. *Теорема називається простою, якщо її умова і висновок — прості висловлення; в противному випадку теорема називається складною.*

Для полегшення доведення складної теореми іноді зручно це доведення замінити на доведення кількох простих теорем. Особливо це зручно здійснити тоді, коли умова теореми є диз'юнкцією простих висловлень, або висновок теореми є кон'юнкцією простих висловлень. Розглянемо більш детальніше таку ситуацію. Легко бачити, що її можна звести до наступних двох простих випадків.

Перший випадок. Умова φ теореми $\models (\varphi \to \psi)$ є диз'юнкцією двох простих висловлень: $\varphi_1 \vee \varphi_2$, тобто дана теорема має вигляд $\models (\varphi_1 \vee \varphi_2) \to \psi$. Легко бачити, що таку теорему можна замінити на кон'юнкцію таких двох простих теорем:

$$\begin{cases} \models (\varphi_1 \to \psi); \\ \models (\varphi_2 \to \psi). \end{cases}$$

Справді, рівносильність такої заміни випливає з рівносильності формул $(\varphi_1 \vee \varphi_2 \to \psi) \equiv (\varphi_1 \to \psi)(\varphi_2 \to \psi)$. Покажемо, що має місце ця рівносильність. Дійсно, маємо: $\varphi_1 \vee \varphi_2 \to \psi \equiv \overline{\varphi_1 \vee \varphi_2} \vee \vee \psi \equiv \overline{\varphi_1} \wedge \overline{\varphi_2} \vee \psi \equiv (\overline{\varphi_1} \vee \psi)(\overline{\varphi_2} \vee \psi) \equiv (\varphi_1 \to \psi)(\varphi_2 \to \psi)$, що і треба було показати.

Приклад. „Якщо протилежні кути або протилежні сторони чотирикутника попарно рівні, то цей чотирикутник є паралелограмом“ — це складна теорема, яку можна представити як кон'юнкцію таких двох простих теорем: „Якщо протилежні кути чотирикутника попарно рівні, то цей чотирикутник — паралелограм“ і „Якщо протилежні сторони чотирикутника попарно рівні, то цей чотирикутник — паралелограм“.

Другий випадок. Висновок ψ теореми $\models (\varphi \to \psi)$ є кон'юнкцією двох простих висловлень: $\psi \equiv \psi_1\psi_2$, тобто дана теорема має вигляд $\models (\varphi \to \psi_1\psi_2)$. Легко бачити, що цю теорему можна замінити на кон'юнкцію таких двох простих теорем:

$$\begin{cases} \models (\varphi \to \psi_1); \\ \models (\varphi \to \psi_2). \end{cases}$$

Дійсно, рівносильність такої заміни випливає з рівносильності формул $(\varphi \to \psi_1\psi_2) \equiv (\varphi \to \psi_1)(\varphi \to \psi_2)$. Покажемо, що має місце ця рівносильність. Справді, маємо: $(\varphi \to \psi_1\psi_2) \equiv \overline{\varphi} \vee \psi_1\psi_2 \equiv \equiv (\overline{\varphi} \vee \psi_1)(\overline{\varphi} \vee \psi_2) \equiv (\varphi \to \psi_1)(\varphi \to \psi_2)$, що і треба було показати.

Приклад. Складну теорему „Якщо натуральне число завершується двома нулями, то воно ділиться на 4 і 25“, можна представити як кон'юнкцію таких двох простих теорем: „Якщо натуральне число завершується двома нулями, то воно ділиться на 4“ і „Якщо натуральне число завершується двома нулями, то воно ділиться на 25“.

2.3 Група взаємно спряжених висловлень; пряма і обернена теореми та протилежні до них теореми; критеріальна теорема

1. Нехай a, b — висловлення. На практиці, як ми знаємо, широке застосування мають висловлення, утворені з заданих висловлень або їх заперечень у вигляді їх імплікацій (згадаймо, що будь-яку теорему можна подати у вигляді істинної імплікації). В результаті отримаємо такі чотири імплікації з відповідними їм назвами:

$a \to b$ — пряма імплікація;

$b \to a$ — обернена до прямої імплікація;

$\overline{a} \to \overline{b}$ — протилежна до прямої імплікація;

$\overline{b} \to \overline{a}$ — обернена до протилежної або протилежна до оберненої імплікація.

Наведена сукупність чотирьох імплікацій називається групою спряжених між собою імплікацій, утворених із висловлень a, b.

Назви імплікацій у цій групі носять відносний характер. Дійсно, в силу закону подвійного заперечення, що означає виконання рівносильностей $\overline{\overline{a}} \equiv a$, $\overline{\overline{b}} \equiv b$, довільну із відмічених у групі чотирьох імплікацій можна назвати прямою. Тоді всі інші імплікації з цієї групи будуть мати відповідні їм аналогічні назви із вказаних в цій групі (наприклад, якщо імплікацію $\overline{a} \longrightarrow \overline{b}$ прийняти за пряму імплікацію, то оберненою до неї буде імплікація $\overline{b} \longrightarrow \overline{a}$ і т.д.).

2. Між імплікаціями із групи взаємно спряжених імплікацій існує тісний взаємозв'язок, а саме:

$$a \to b \equiv \overline{b} \to \overline{a}; \tag{2.3.1}$$

$$\overline{a} \to \overline{b} \equiv b \to a; \tag{2.3.2}$$

$$\models (a \to b) \vee (b \to a); \tag{2.3.3}$$

$$\models (\overline{a} \to \overline{b}) \vee (\overline{b} \to \overline{a}). \tag{2.3.4}$$

Дійсно, $a \to b \equiv \overline{a} \vee b \equiv b \vee \overline{a} \equiv \overline{\overline{b}} \vee \overline{a} \equiv \overline{b} \to \overline{a}$, що вказує на виконання рівносильності (2.3.1). Те, що виконується рівносильність (2.3.2), показується цілком аналогічно. Доведемо, що має місце, наприклад, теорема (2.3.4). Дійсно, $(\overline{a} \to \overline{b}) \vee (\overline{b} \to \overline{a}) \equiv (\overline{\overline{a}} \vee \overline{b}) \vee (\overline{\overline{b}} \vee$

$\vee\overline{a}) \equiv (a\vee\overline{b})\vee(b\vee\overline{a}) \equiv (a\vee\overline{a})\vee(b\vee\overline{b}) \equiv T\vee T \equiv T$, звідки і випливає теорема (2.3.4). Нагадаємо, що на сторінці 31 було введено позначення $\models \Phi$ для теореми виду „виконується, тобто має місце Φ“, що рівносильно твердженню „виконується рівносильність $\Phi \equiv T$“.

Користуючись наведеною вище групою спряжених висловлень та вказаними між ними взаємозв'язками у вигляді співвідношень (2.3.1) — (2.3.4), можна ту чи іншу теорему подати в більш зручному для розуміння формулюванні, що часто полегшує її доведення, дає можливість проводити при доведенні відповідні логічні міркування в доступнішій для розуміння формі.

3. Як було відмічено на сторінці 57, будь-яку теорему можна представити у вигляді істинної імплікації, яку записують формулою $\models (\varphi \to \psi)$, де висловлення φ цієї імплікації називають умовою, а висловлення ψ — її логічним висновком, або ж у вигляді логічного слідування з символічним записом $\varphi \Rightarrow \psi$, в якому висновок ψ, говорять, логічно слідує з умови φ.

Нехай має місце теорема $(\varphi \Rightarrow \psi)$, яку назвемо **прямою теоремою**; якщо у відповідній імплікації $(\varphi \to \psi)$ поміняти місцями умову φ і висновок ψ, тобто утворити обернену імплікацію $(\psi \to \varphi)$, і ця обернена імплікація виявиться істинною, то відповідна їй теорема $(\psi \Rightarrow \varphi)$ називається **оберненою до прямої теореми**. Аналогічно, якщо виявиться, що істинними є протилежна імплікація $(\overline{\varphi} \to \overline{\psi})$ або обернена до протилежної імплікація $(\overline{\psi} \to \overline{\varphi})$, то відповідні теореми назвемо так: $(\overline{\varphi} \Rightarrow \overline{\psi})$ — протилежна теорема до прямої; $(\overline{\psi} \Rightarrow \overline{\varphi})$ — обернена теорема до протилежної або протилежна теорема до оберненої.

4. Безперечно виникають такі питання: нехай має місце пряма теорема, виражена прямою імплікацією $\varphi \to \psi$; а чи будуть тоді теоремами твердження, виражені відповідно оберненою імплікацією, протилежною імплікацією, оберненою до протилежної імплікації відносно прямої імплікації $\varphi \to \psi$? Безпосередні приклади з практики показують, що в деяких конкретних випадках відповіді на ці питання виявляються позитивними, а в деяких — негативними.

Наприклад, висловлення „В паралелограмі діагоналі в точці перетину діляться навпіл“ є теоремою. Якщо сформулювати висловлення у вигляді оберненої, протилежної і оберненої до протилежної імплікації відносно даного висловлення, то легко бачити, що всі вони теж є теоремами: „Якщо в чотирикутнику діагоналі в точці перетину діляться навпіл, то цей чотирикутник є паралелограмом“; „Якщо чотирикутник не є паралелограмом, то його діагоналі в точці перетину не діляться навпіл“; „Якщо діагоналі чотирикутника в точці перетину не діляться навпіл, то цей чотирикутник не є паралелограмом“.

А якщо ж візьмемо, **наприклад**, висловлення „Якщо натуральне число ділиться на 6, то воно ділиться на 3“, то очевидно, що воно істинне, тобто є теоремою; разом з тим при розгляді висловлень у вигляді оберненої, протилежної і оберненої до протилежної імплікації відносно даного висловлення як прямої імплікації, то легко бачити, що серед висловлень, відповідних вказаним трьом імплікаціям, виду: а) „Якщо натуральне число ділиться на 3, то воно ділиться на 6“, б) „Якщо натуральне число не ділиться на 6, то воно не ділиться на 3“, в) „Якщо натуральне число не ділиться на 3, то воно не ділиться на 6“, висловлення а), б) хибні, а висловлення в) істинне.

Згадайте також відомий вислів „Собака — друг“; самостійно доповніть його до групи спряжених висловів та проаналізуйте ці висловлення щодо їх істинності.

5. На основі взаємозв'язків у вигляді співвідношень (2.3.1) — (2.3.4), які мають місце для групи взаємно спряжених висловлень у вигляді імплікації, можна зробити наступні висновки:

1. Якщо має місце пряма теорема $\varphi \Rightarrow \psi$, то обов'язково має місце теорема $\overline{\psi} \Rightarrow \overline{\varphi}$, обернена до протилежної, або, що одне і те ж саме, протилежна до оберненої, і навпаки.

2. Якщо має місце обернена теорема $\psi \Rightarrow \varphi$, то обов'язково має місце протилежна теорема $\overline{\varphi} \Rightarrow \overline{\psi}$, і навпаки, де оберненій і протилежній теоремам відповідають істинні обернена імплікація $\psi \to \varphi$ і протилежна імплікація $(\overline{\varphi} \to \overline{\psi})$ відносно прямої імплікації $\varphi \to \psi$, яка, доречі, не обов'язково істинна.

3. Якщо φ, ψ — висловлення, то з двох складних висловлень $(\varphi \to \psi)$ і $(\psi \to \varphi)$ утворюється істинна диз'юнкція, тобто

має місце теорема:

$$\models ((\varphi \to \psi) \vee (\psi \to \varphi)).$$

4. Якщо φ, ψ — висловлення, то з двох складних висловлень $(\overline{\varphi} \to \overline{\psi})$ і $(\overline{\psi} \to \overline{\varphi})$ утворюється істинна диз'юнкція, тобто має місце теорема:

$$\models ((\overline{\varphi} \to \overline{\psi}) \vee (\overline{\psi} \to \overline{\varphi})).$$

6. Нехай мають місце одночасно пряма теорема $(\varphi \Rightarrow \psi)$ і відповідна їй обернена теорема $(\psi \Rightarrow \varphi)$. Легко бачити, що в цьому випадку має місце і теорема $\models (\varphi \leftrightarrow \psi)$ або, що те ж саме, як ми знаємо, має місце логічна еквівалентність $(\varphi \Leftrightarrow \psi)$. Ця логічна еквівалентність є кон'юнкцією прямої та відповідної їй оберненої теореми і часто називається **критеріальною теоремою.** Словесно таку критеріальну теорему можна прочитати таким чином: „ψ тоді і тільки тоді, коли φ“.

Зрозуміло, що доведення критеріальної теореми $(\varphi \Leftrightarrow \psi)$ складатиметься з двох частин: доведення прямої теореми $(\varphi \Rightarrow \psi)$ і доведення оберненої до неї теореми $(\psi \Rightarrow \varphi)$. Враховуючи відмічені раніше взаємозв'язки (2.3.1), (2.3.2) між імплікаціями групи спряжених висловлень та закони контрапозиції і подвійного заперечення, для доведення критеріальної теореми $(\varphi \Leftrightarrow \psi)$ можна використати один із наступних варіантів доведення пари теорем:

$$\begin{cases} \varphi \Rightarrow \psi; \\ \psi \Rightarrow \varphi, \end{cases} \qquad \begin{cases} \varphi \Rightarrow \psi; \\ \overline{\varphi} \Rightarrow \overline{\psi}, \end{cases} \qquad \begin{cases} \overline{\psi} \Rightarrow \overline{\varphi}; \\ \psi \Rightarrow \varphi, \end{cases} \qquad \begin{cases} \overline{\psi} \Rightarrow \overline{\varphi}; \\ \overline{\varphi} \Rightarrow \overline{\psi}. \end{cases}$$

Вибір однієї з вказаних пар теорем залежить від зручності та доступності для розуміння логічних міркувань в тому чи іншому конкретному випадку.

Розглянутий вище приклад взаємозв'язку двох висловлень: „Чотирикутник є паралелограмом“ і „Діагоналі чотирикутника в точці перетину діляться пополам“ показує, що має місце така критеріальна теорема: „Діагоналі чотирикутника в точці перетину діляться пополам тоді і тільки тоді, коли цей чотирикутник є паралелограмом“.

Зі шкільної геометрії відома і така критеріальна теорема: „Протилежні сторони чотирикутника попарно рівні тоді і тільки тоді, коли цей чотирикутник є паралелограмом“.

7. Зауважимо, що якщо має місце критеріальна теорема ($\varphi \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \psi$), то це рівносильно тому, що має місце і критеріальна теорема ($\psi \Leftrightarrow \varphi$). В зв'язку з цим зауваженням робимо висновок про те, що попередні дві критеріальні теореми рівносильні відповідно таким критеріальним теоремам:

„Чотирикутник є паралелограмом тоді і тільки тоді, коли його діагоналі в точці перетину діляться пополам“.

„Чотирикутник є паралелограмом тоді і тільки тоді, коли його протилежні сторони попарно рівні“.

В зв'язку з цим згадаймо **загальноприйняте означення паралелограма**: „Чотирикутник називається паралелограмом тоді і тільки тоді, коли його сторони попарно паралельні“.

Бачимо, що попередні дві критеріальні теореми про паралелограм мають ту ж саму структуру, ту ж саму форму вираження, що і дане означення. Єдина різниця полягає лише в тому, що в означенні присутнє слово „**називається**“. Це дає нам підставу зробити висновок про те, що кожну із двох наведених вище критеріальних теорем можна вибрати за нове означення паралелограма, вставивши замість слова „**є**“ слово „**називається**“. Тоді уже загальноприйняте означення перетвориться в критеріальну теорему, яку можна доводити.

Звідки зробимо загальний висновок: **критеріальні теореми є джерелом утворення нових означень для досліджуваних об'єктів та відповідних їм понять.**

2.4 Необхідні та достатні умови

1. Як було відмічено раніше, будь-яку теорему можна подавати у вигляді істинної імплікації двох висловлень:

$$\models (\varphi \to \psi), \text{ тобто } \varphi \to \psi \equiv T,$$

де висловлення φ називається **умовою теореми**, а висловлення ψ — її **логічним висновком**, або ж у вигляді так званого **логічного**

слідування

$$\varphi \Rightarrow \psi$$

наслідка ψ з умови φ. Читається такий запис по-різному:

„якщо виконується умова φ, то виконується висновок ψ“;
„з умови φ випливає (слідує) висновок ψ“;
„висновок ψ слідує з умови φ“.

Разом з тим в математиці широко використовується читання теорем в термінах необхідних або достатніх умов, чи в термінах сполучників „тоді, коли“ або „тільки тоді, коли“, а саме:

1. **Якщо має місце логічне слідування ($\varphi \Rightarrow \psi$), то це означає: умова φ є достатньою для виконання висновку ψ або умова ψ є необхідною для φ.**

2. **Якщо має місце логічне слідування ($\varphi \Rightarrow \psi$), то це означає: φ тільки тоді, коли ψ або ψ тоді, коли φ.**

2. Розглянемо в ролі ілюстрації такий **приклад**. Очевидна така теорема: „Якщо натуральне число закінчується нулем, то воно ділиться на 5“. В термінах достатності та необхідності ця теорема звучить так: „Те, що натуральне число закінчується нулем, є достатнім для того, щоб воно ділилось на 5“; „Те, що натуральне число ділиться на 5, є необхідним для того, щоб воно закінчувалося нулем“. В термінах сполучників „тоді, коли“, „тільки тоді, коли“ отримаємо: „Натуральне число закінчується нулем тільки тоді, коли воно ділиться на 5“; „Натуральне число ділиться на 5 тоді, коли воно закінчується нулем“.

3. Те, що умова φ є достатньою для виконання висновку ψ, означає, як було сказано вище, що має місце пряма теорема ($\varphi \Rightarrow \psi$). Однак звідси ніяк не випливає, що умова φ є обов'язково необхідною для ψ. В противному випадку це означало би, що разом з тим, що має місце пряма теорема ($\varphi \Rightarrow \psi$), обов'язково повинна мати місце і обернена теорема ($\psi \Rightarrow \varphi$), що в загальному випадку місця не має (знову згадайте вислів „собака — друг“). Аналогічно і необхідна умова не завжди обов'язково є достатньою. Це якраз ілюструє і наведений вище приклад, до речі, а саме:

„Те, що натуральне число закінчується нулем, не є необхідним для того, щоб воно ділилося на 5“;

„Те, що натуральне число ділиться на 5, не є достатнім для того, щоб воно закінчувалося нулем“.

Разом із тим іноді необхідна умова буває одночасно і достатньою, а достатня — необхідною. Очевидно, що це має місце в тому і тільки в тому випадку, коли одночасно має місце як пряма теорема ($\varphi \Rightarrow \psi$), так і обернена до неї теорема ($\psi \Rightarrow \varphi$), тобто, як було відмічено раніше, має місце критеріальна теорема $\varphi \Leftrightarrow \psi$ або, що рівносильно тому, що має місце логічна еквівалентність $\varphi \Leftrightarrow \psi$. В цьому випадку необхідна умова ψ є і достатньою для φ, а достатня умова φ є і необхідною для ψ.

Наприклад, має місце теорема: „Для того, щоб натуральне число ділилось на 6, необхідно і достатньо, щоб воно ділилось на 2 і на 3“.

Очевидно, що вираз „необхідно і достатньо“ для критеріальної теореми можна замінити на вираз „тоді і тільки тоді, коли“. В результаті сформульована вище критеріальна теорема прийме такий вигляд: „Натуральне число ділиться на 2 і на 3 тоді і тільки тоді, коли воно ділиться на 6“.

На завершення для кращого запам'ятовування введеної термінології ще раз зведемо в єдине ціле розглянуті вище поняття:

1. Якщо має місце теорема $\models (\varphi \to \psi)$, тобто логічне слідування ($\varphi \Rightarrow \psi$), то їх можна виразити одним із таких способів:

φ є достатнім для ψ;

ψ є необхідним для φ;

φ тільки тоді, коли ψ;

ψ тоді, коли φ.

2. Якщо має місце критеріальна теорема $\models (\varphi \leftrightarrow \psi)$, тобто логічна еквівалентність ($\varphi \Leftrightarrow \psi$), то її можна виразити одним із таких способів:

ψ є критерієм для φ;

ψ є необхідним і достатнім для φ;

ψ тоді і тільки тоді, коли φ.

2.5 Прямі та непрямі методи доведення теорем; метод доведення від супротивного

1. Як було відмічено раніше, довільну теорему можна подати у вигляді логічного слідування $(\varphi \Rightarrow \psi)$, де φ — умова теореми, а ψ — її логічний висновок, або ж, що те саме, у вигляді істинної імплікації $\varphi \rightarrow \psi$, тобто у вигляді рівносильності $\varphi \rightarrow \psi \equiv T$, що позначають ще і так: $\models (\varphi \rightarrow \psi)$.

Також раніше було відмічено, що **доведення теореми — це, як правило, скінченна послідовність аксіом теорії, які приймаються без доведення, раніше доведених теорем та логічних законів, що зв'язують їх; завершенням такої послідовності повинен бути висновок про те, що має місце дана теорема**.

Якщо виходити з означення операції імплікації висловлень, то в найпростішому випадку доведення теореми $\models (\varphi \rightarrow \psi)$ можна звести до одного з трьох випадків:

- показати, що $\varphi \equiv F$;
- показати, що $\psi \equiv T$;
- показати, що при $\varphi \equiv T$ виконується $\psi \equiv T$.

Можна було би поступити і по-іншому: показати неможливість одночасного виконання рівносильностей $\varphi \equiv T$ і $\psi \equiv F$.

В загальному ж випадку розглядають ланцюжок логічних слідувань: $\varphi \Rightarrow \varphi_1$; $\varphi_1 \Rightarrow \varphi_2$; $...\varphi_n \Rightarrow \psi$. Тоді на основі застосування логічного закону силогізму робиться висновок про те, що має місце теорема $(\varphi \Rightarrow \psi)$. **Такий шлях доведення теореми називається прямим методом доведення. В наведеному ланцюжку логічних слідувань можуть бути і аксіоми теорії, і раніше доведені теореми, і логічні закони, що зв'язують їх. Іноді символічно весь ланцюжок, кінцем якої є сама теорема, записують так:**

$$\varphi \Rightarrow \varphi_1;\ \varphi_1 \Rightarrow \varphi_2;\ ...\varphi_n \Rightarrow \psi \models (\varphi \rightarrow \psi).$$

2. Корисним на практиці для використання є закон силогізму, якщо його використати для ланцюжка теорем у вигляді таких логічних слідувань: **якщо має місце ланцюжок логічних слідувань виду** $\varphi_1 \Rightarrow \varphi_2, \varphi_2 \Rightarrow \varphi_3, ..., \varphi_{n-1} \Rightarrow \varphi_n, \varphi_n \Rightarrow \varphi_1$**, то має місце аналогічний ланцюжок логічних еквівалентностей:** $\varphi_1 \Leftrightarrow \varphi_2, \varphi_2 \Leftrightarrow \varphi_3, ..., \varphi_{n-1} \Leftrightarrow \varphi_n, \varphi_n \Leftrightarrow \varphi_1$**, причому навіть мають місце критеріальні теореми такого виду:** $\varphi_i \Leftrightarrow \varphi_j$**, де** $i, j = 1, 2, ..., n$**.**

Доведення цього факту проведіть самостійно.

3. На практиці прямий метод доведення теорем не завжди вдається легко здійснити. Тоді використовують так звані **непрямі методи доведення теорем**. Одним із таких непрямих методів є метод використання законів подвійного заперечення і контрапозиції, які базуються на рівносильностях $a \to b \equiv \overline{b} \to \overline{a}$; $\overline{\overline{a}} \equiv a$.

Приклад. Розглянемо теорему „Якщо квадрат цілого числа є парне число, то і саме ціле число парне“. Символічно ця теорема запишеться так: $\models (n^2 \vdots 2 \to n \vdots 2)$, де $n \in \mathbb{Z}$ — довільне ціле число. Замість того, щоб доводити дану теорему, легше довести рівносильну їх протилежну до оберненої теорему „Якщо ціле число непарне, то і квадрат його теж є непарним числом“, яка в символічній формі прийме вигляд: $\models \ (\overline{n \vdots 2} \to \overline{n^2 \vdots 2})$. Для доведення цієї теореми візьмемо непарне ціле число $n \in \mathbb{Z}$; нехай $n = 2k + 1$, де $k \in \mathbb{Z}$. Тоді розглянемо його квадрат n^2. Отримаємо $n^2 = (2k + 1)^2 = (2k)^2 + + 2 \cdot 2k \cdot 1 + 1^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1$. Отже, $\overline{n^2 \vdots 2}$, оскільки n^2 є сумою парного числа і одиниці, що і треба було довести. Таким чином, справді має місце теорема $\models (n^2 \vdots 2 \Rightarrow n \vdots 2)$, де $n \in \mathbb{Z}$ — довільне ціле число.

4. Серед непрямих методів доведення одним із найбільш поширених є так званий **метод доведення від супротивного**, який ще називають методом зведення до суперечності (отримання хиби). Суть цього методу полягає в наступному. Нехай потрібно довести теорему: $\models (\varphi \to \psi)$. Замість цього доводять таку теорему: $\models ((\overline{\varphi \to \psi}) \to (c \wedge \overline{c}))$, тобто теорему $\models ((\overline{\varphi \to \psi}) \to F)$, де F — це хиба. Доведення останньої теореми означає, що проводимо наступні міркування: нехай не має місце теорема $\models \overline{(\varphi \to \psi)}$, тобто нехай істинним є заперечення $\overline{(\varphi \to \psi)}$ імплікації $(\varphi \to \psi)$. Продовжуючи далі міркування, ми в кінці-кінців повинні показати, що отримується хиба F, тобто якась суперечність $c \wedge \overline{c}$. Цим самим, виявляється, ми доведемо рівносильність $(\overline{(\varphi \to \psi)}) \to F \equiv \varphi \to \psi$. Дійсно, маємо $(\overline{\varphi \to \psi}) \to F \equiv \overline{\overline{(\varphi \to \psi)}} \vee F \equiv (\varphi \to \psi) \vee F \equiv \varphi \to \psi$, що і треба було показати.

Приклад. Застосуємо метод від супротивного для доведення теореми попереднього пункту $\models (n^2 \vdots 2 \to n \vdots 2)$. Проведемо такі міркування. Нехай має місце $\overline{n^2 \vdots 2 \to n \vdots 2}$. Тоді $n^2 \vdots 2$ і $\overline{n \vdots 2}$ тобто $n^2 = 2k$ і $n = 2l + 1$, де $k, l \in \mathbb{Z}$ — деякі цілі числа. Звідси маємо: $n^2 = 2k$ — парне число і $n^2 = (2l + 1)^2 = 4l^2 + 4l + 1 = 2(2l^2 + 2l) + 1$ — непарне число, що вказує на протиріччя, хибу F: n^2 — одночасно є і парним числом, і непарним числом. Тому має місце $(n^2 \vdots 2 \Rightarrow n \vdots 2)$, тобто виконується теорема $\models (n^2 \vdots 2 \to n \vdots 2)$.

5. Виявляється, що доведення теореми $\models (\varphi \to \psi)$ методом від супротивного, базується на доведенні теореми $\models \overline{(\varphi \to \psi)} \to F$. Також можна проводити доведення методом від супротивного на основі однієї із таких теорем: $\models (\varphi \wedge \overline{\psi} \to \psi)$ або $\models (\varphi \wedge \overline{\psi} \to \overline{\varphi})$.

Пропонуємо самостійно показати, що виконуються рівносильності $\varphi \wedge \overline{\psi} \to \psi \equiv \varphi \to \psi$, $\varphi \wedge \overline{\psi} \to \overline{\varphi} \equiv \varphi \to \psi$, які підтверджуватимуть правомочність доведення методом від супротивного, основаним на вказаних вище теоремах.

2.6 Питання для самоперевірки засвоєння знань та вправи

1. Вкажіть у вигляді символічного запису взаємозв'язок, який існує між тотожно істинними та тотожно хибними формулами.

2. Чому є важливими в наукових дослідженнях логічні закони, джерелами виникнення яких є тавтології?

3. Що слід розуміти під логічним законом?

4. Наведіть приклади деяких логічних законів.
5. Доведіть, що закон тотожності є тавтологією.
6. Доведіть, що закон подвійного заперечення є тавтологією.
7. Доведіть, що закон протиріччя є тавтологією.
8. Доведіть, що закон виключення третього є тавтологією.
9. Доведіть, що закон силогізму є тавтологією.
10. Доведіть, що закон контрапозиції є тавтологією.
11. Доведіть, що закон modus pones є тавтологією.
12. Доведіть, що закон modus tollens є тавтологією.
13. Що таке логічна еквівалентність двох формул та як вона позначається?
14. Що таке логічне слідування між двома формулами та як воно позначається?
15. Який Ви знаєте взаємозв'язок між логічною еквівалентністю та рівносильністю формул?
16. Який Ви знаєте взаємозв'язок між логічною еквівалентністю та логічним слідуванням формул?
17. Що таке база математичної теорії та, що до неї входить при дослідженні цієї теорії на аксіоматичній основі?
18. Що таке теорема в математиці?
19. Що таке доведення теореми?
20. Як символічно можна зобразити будь-яку теорему?
21. Що таке умова і висновок теореми?
22. Наведіть приклад теореми з виділенням її умови та висновку.
23. Яка теорема називається простою? Наведіть відповідний приклад.

24. Яка теорема називається складною? Наведіть відповідний приклад.

25. Як можна складну теорему, умова якої є диз'юнкцією простих висловлень, замінити на прості теореми? Проілюструйте відповідним прикладом.

26. Як можна складну теорему, висновок якої є кон'юнкцією простих висловлень, замінити на прості теореми? Проілюструйте відповідним прикладом.

27. Доведіть рівносильність заміни складної теореми на кон'юнкцію простих теорем, якщо:
    а) умова складної теореми є диз'юнкцією простих висловлень;
    б) висновок складної теореми є кон'юнкцією простих висловлень.

28. Що таке група взаємно спряжених висловлень?

29. Яка імплікація називається:
    а) оберненою до прямої;
    б) протилежною до прямої;
    в) оберненою до протилежної або протилежною до оберненої?

30. Чому назви імплікацій носять відносний характер у групі взаємно спряжених імплікацій?

31. Наведіть приклади груп взаємно спряжених імплікацій.

32. Які Ви знаєте зв'язки між імплікаціями з групи взаємно спряжених висловлень?

33. Доведіть, що диз'юнкція двох взаємно обернених імплікацій істинна.

34. Доведіть, що імплікація $a \to b$ та обернена до протилежної імплікація $\overline{b} \to \overline{a}$ рівносильні між собою.

35. Нехай логічне слідування $\varphi \Rightarrow \psi$ — це пряма теорема. Яка теорема називається:
    а) оберненою до прямої;
    б) протилежною до прямої;
    в) оберненою до протилежної або протилежною до оберненої?

36. Чи завжди до заданої теореми мають місце обернена, протилежна, протилежна до оберненої? Проілюструйте свої міркування конкретними прикладами.

37. Обґрунтуйте, чому одночасно з даною теоремою має місце протилежна до оберненої або, що те ж саме, обернена до протилежної теореми.

38. Обґрунтуйте, чому одночасно з оберненою теоремою має місце відповідна протилежна теорема.

39. Обґрунтуйте, чому диз'юнкція з двох взаємно обернених імплікацій утворює теорему.

40. Що таке критеріальна теорема?

41. Обґрунтуйте, чому доведення критеріальної теореми зводиться до доведення прямої та оберненої до неї теореми.

42. Які різноманітні варіанти можна застосувати до доведення критеріальної теореми, враховуючи взаємозв'язки між імплікаціями групи спряжених висловлень?

43. Поясніть на конкретних прикладах, чому критеріальні теореми є джерелом нових означень.

44. Сформулюйте в термінах „необхідна умова“, „достатня умова“логічне слідування $\varphi \Rightarrow \psi$.

45. Сформулюйте в термінах сполучників „тоді, коли“, „тільки тоді, коли“логічне слідування $\varphi \Rightarrow \psi$.

46. Сформулюйте відому Вам теорему, в якій вжиті сполучники „якщо ..., то ...“, в термінах:
    а) „необхідна умова“, „достатня умова“;
    б) сполучників „тоді, коли“, „тільки тоді, коли“.

47. Сформулюйте критеріальну теорему ($\varphi \Rightarrow \psi$) в різних термінах та наведіть ілюструючий приклад.

48. Що таке прямий метод доведення теорем та на якому логічному законі він побудований?

49. Як в найпростішому випадку, виходячи з означення імплікації, довести теорему $\models (\varphi \Rightarrow \psi)$?

50. Як використати закони силогізму для доведення ланцюжка логічних еквівалентностей $\varphi_1 \Leftrightarrow \varphi_2 \Leftrightarrow \varphi_3 \Leftrightarrow ...\varphi_{n-1} \Leftrightarrow \varphi_n$? Доведіть, що в такому випадку має місце логічна еквівалентність $\varphi_i \Leftrightarrow \varphi_j$, де $i, j = 1, ..., n$.

51. Поясніть на конкретному прикладі, як використовуються закони подвійного заперечення та контрапозиції для доведення теореми непрямим методом.

52. Що таке метод доведення теореми від супротивного?

53. Обґрунтуйте логічні основи методу доведення від супротивного.

54. Доведіть самостійно рівносильності $\overline{\varphi \to \psi} \to F \equiv \varphi \to \psi$, $\varphi \wedge \overline{\psi} \to \psi \equiv \varphi \to \psi$, $\varphi \wedge \overline{\psi} \to \overline{\varphi} \equiv \varphi \to \psi$, на яких ґрунтується метод доведення теореми від супротивного.

55. Скласти групу взаємно спряжених імплікацій в термінах „... якщо, то ...“ з вказаних висловлень a та b і вияснити, які з імплікацій істинні, тобто є логічними слідуваннями, якщо:
а) $a =$„дані кути вертикальні“, $b =$„дані кути рівні“;
б) $a =$„навколо даного чотирикутника можна описати коло“, $b =$ „сума протилежних кутів даного чотирикутника рівна 180 градусів“;
в) $a =$„даний чотирикутник є ромбом“, $b =$ „в даний чотирикутник можна вписати коло“;
г) $a =$„добуток двох даних чисел рівний нулю“, $b =$„один із співмножників добутку двох даних чисел рівний нулю“.
Чи можна з вказаних висловлень a та b утворити логічну еквівалентність, тобто критеріальну теорему?

56. Сформулюйте отримані в попередній вправі 55 теореми в термінах:
а) „необхідно“, „достатньо“, „необхідно і достатньо“;
б) „тоді, коли“, „і тільки тоді, коли“, „тоді і тільки тоді, коли“.

57. Встановити, чи ψ є логічним висновком умови φ, якщо:
    а) $\varphi = a(b \vee c); \psi = \overline{a} \to b$;
    б) $\varphi = a \vee \overline{b} \vee c; \psi = a \vee \overline{b}c$;
    в) $\varphi = a \to \overline{c}; \psi = (a \to b)(a \to c)$;
    г) $\varphi = b \to c; \psi = b \to c \vee a$;
    д) $\varphi = a \to bc; \psi = a \to b$;
    е) $\varphi = a \vee c \to b; \psi = c \to b$.

58. Встановити, які з умов є необхідними, достатніми, а які одночасно і необхідними, і достатніми:
    а) „Якщо $x^4 + y^4 = 0$, то $x = y = 0$“;
    б) „Якщо $k \vdots 16$, то $k \vdots 4$“;
    в) „Якщо $xy = 0$, то $x = 0$“;
    г) „Якщо $\sqrt{x} = 3$, то $x > 6$“;
    д) „Якщо $sinx = 1$, то $x = 0$“;
    е) „Якщо $x^2 = x^3$, то $x = 1$“.

59. З'ясувати, чи з висловлення „Студент, що багато часу вчиться, успішно здає екзамени“, випливає таке висловлення: „Студент, який провалився на екзамені, мало вчився“.

60. Перевірити, чи логічно правильно зроблено висновок в таких міркуваннях: „Для того, щоб допустили до екзаменів, необхідно здати залік. Я отримаю залік, якщо навчуся розв'язувати задачі. Я не засвоїв розв'язування задач. Отже, мене не допустять до екзаменів“?

61. Використавши взаємозв'язки між імплікаціями групи взаємно спряжених висловлень, виявити, які з наступних висловлень слідують з висловлення „Якщо натуральне число закінчується нулем, то воно ділиться на 5“:
    а) „Для того, щоб натуральне число закінчувалося нулем, достатньо, щоб воно ділилося на 5“;
    б) „Для того, щоб натуральне число ділилося на 5, необхідно, щоб воно закінчувалося нулем“;
    в) „Для того, щоб натуральне число ділилося на 5, достатньо, щоб воно закінчувалося нулем“;
    г) „Для того, щоб натуральне число не ділилося на 5, достатньо, щоб воно не закінчувалося нулем“;

д) „Натуральне число закінчується нулем тоді і тільки тоді, коли воно ділиться на 5“;

е) „Натуральне число не ділиться на 5 тоді і тільки тоді, коли воно не закінчується нулем“.

Вказані висловлення записати символічно та вияснити, які з них рівносильні між собою.

62. Нехай $\varphi \Rightarrow \psi$ — логічне слідування. Довести, що кожна необхідна умова для ψ є необхідною для φ, а кожна достатня умова для φ є достатньою і для ψ.

63. Методом від супротивного довести, що множина всіх простих чисел нескінченна.

64. Довести, використавши метод від супротивного, що:

    а) рівняння $x^2 - 5 = 0$ не має розв'язків в множині раціональних чисел;

    б) число $\lg 5$ є ірраціональне число.

65. ***Теорема Гаубера або принцип повної диз'юнкції** формулюється так: „Дано такі дві імплікації, що диз'юнкція їх умов істинна, а їх висновки несумісні. Тоді, якщо дані імплікації істинні, обернені до них імплікації теж істинні“. Виразити цю теорему символічно та переконатися в тому, що вона справджується. Узагальнити цю теорему на довільне число імплікацій. Навести приклади ілюстрації теореми Гаубера.

66. Фокусник тримає в одній руці (невідомо в якій) монету. Відомо, що він завжди обманює або завжди говорить правду (але невідомо, що саме). Як за допомогою єдиного запитання до фокусника виявити з отриманої відповіді, в якій руці знаходиться монета?

67. При дослідженні хвороби у пацієнта лікар встановив таку інформацію:

    а) симптом a спільно з симптомом b зустрічається тоді і тільки тоді, коли є симптом c;

    б) наявність одночасно симптомів b і d тягне за собою хоча би один із симптомів a, c;

    в) якщо симптом b буває без a, то присутній a або c;

г) з наявності симптому b без c випливає відсутність симптому a.

Максимально спростити отриману інформацію.

68. Перевірити, чи логічно правильно зроблений висновок в наступних міркуваннях: „Якщо A переможе на виборах, він буде задоволений; а якщо він буде задоволений, то він поганий борець в передвиборній компанії. Але якщо він провалиться на виборах, то втратить довіру партії. Він поганий борець на виборах, якщо втратить довіру партії. Якщо ж він поганий борець в передвиборній компанії, йому слід вийти з партії. Відомо, що A або переможе на виборах, або провалиться. Отже, йому треба вийти з партії“.

69. Призер математичної олімпіади повністю розв'язав дві задачі з чотирьох запропонованих. З'ясувати, які саме задачі він розв'язав повністю, якщо відомо, що:

    а) невірно, що розв'язані перша і третя задачі;

    б) якщо друга задача розв'язана, то і четверта розв'язана;

    в) з двох висловлень: „четверта задача не розв'язана“ і „ні друга, ні третя задачі не розв'язані“ — одне правильне, а друге неправильне.

2.7 Відповіді та вказівки до розв'язання деяких вправ

№ 55.

в)

$a \to b =$ „В ромб можна вписати коло“;

$b \to a =$ „Якщо в чотирикутник можна вписати коло, то він є ромбом“;

$\overline{a} \to \overline{b} =$ „Якщо чотирикутник не є ромбом, то в нього не можна вписати коло“;

$\overline{b} \to \overline{a} =$ „Якщо в чотирикутник не можна вписати коло, то він не є ромбом“;

$a \to b, \overline{b} \to \overline{a}$ — істинні імплікації;

$b \to a, \overline{a} \to \overline{b}$ — хибні імплікації при розгляді довільних чотирикутників;

критеріальну теорему з цих висловлень a, b утворити неможливо.

г)

$a \to b =$ „Якщо добуток двох чисел дорівнює нулю, то один із співмножників рівний нулю“;

$b \to a =$ „Якщо один із співмножників добутку двох чисел рівний нулю, то і добуток цих чисел рівний нулю“;

$\overline{a} \to \overline{b} =$„Якщо добуток двох чисел не дорівнює нулю, то жоден із співмножників добутку не рівний нулю “;

$\overline{b} \to \overline{a} =$ „Якщо обидва співмножники добутку двох чисел не рівні нулю, то і добуток цих чисел не дорівнює нулю“;

Тут всі чотири імплікації є логічними слідуваннями. Тому з них можна утворити критеріальну теорему.

Наприклад, „Добуток двох чисел дорівнює нулю тоді і тільки тоді, коли один із співмножників рівний нулю“, або „Добуток двох чисел ненульовий тоді і тільки тоді, коли обидва співмножники ненульові“.

Символічно це можна подати у вигляді:

$xy \neq 0 \leftrightarrow (x \neq 0 \wedge y \neq 0)$, де $x, y \in R$ — довільні дійсні числа, або у вигляді $xy = 0 \leftrightarrow (x = 0 \vee y = 0)$.

№ 56.

в)

$a \to b =$ „Необхідною умовою для ромба є те, що в нього можна вписати коло“;

„Достатньою умовою для чотирикутника, в якого можна вписати коло, є те, що він є ромб“.

„В чотирикутник можна вписати коло тоді, коли він є ромбом“;

„Чотирикутник є ромбом тільки тоді, коли в нього можна вписати коло“.

г)

$a \to b =$ „Те що один із двох співмножників рівний нулю, є необхідним для того, щоб їх добуток був рівний нулю“;

„Те, що добуток двох чисел рівний нулю, є достатнім для того, щоб один із співмножників був рівний нулю“;

„Один із двох співмножників рівний нулю тоді, коли їх добуток рівний нулю“;

„Добуток двох чисел рівний нулю тільки тоді, коли один із співмножників рівний нулю“;

„Для того, щоб один із двох співмножників був рівний нулю, необхідно і достатньо, щоб їх добуток був рівний нулю“;

„Один із двох співмножників рівний нулю тоді і тільки тоді, коли їх добуток дорівнює нулю“.

№ 57.

а), г), д), е): ψ є логічним висновком для ϕ.

№ 58.

а)

„$x = y = 0$ є необхідним і достатнім для $x^4 + y^4 = 0$“;

б)

„k$\vdots$16 є достатнім для k$\vdots$4, а k$\vdots$4 є необхідним для k$\vdots$16“;

в)

„$x = 0$ є достатнім для $xy = 0$, а $xy = 0$ є необхідним для $x = 0$“;

г)

„$\sqrt{x} = 3$ є достатнім для $x > 6$, а $x > 6$ є необхідним для $\sqrt{x} = 3$“;

д)

умови „$\sin(x) = 1$“і „$x = 0$“не є ні необхідним, ні достатнім одна для одної;

е)

$x = 1$ є достатнім для $x^2 = x^3$, а $x^2 = x^3$ є необхідним для $x = 1$;

№ 59. Так. **Вказівка**. Ввести позначення для висловлень: $a =$„Студент багато часу вчиться“, $b =$„Студент успішно здає екзамен“.

№ 60. Висновок зроблено логічно неправильно. **Вказівка**. Ввести позначення для висловлень: $a =$„Я допущений до екзамена“, $b =$„Я отримав залік“, $c =$„Я навчуся розв'язувати задачі“ і показати, що не є істинною формула $(a \to b)(c \to b)\overline{c} \to \overline{a}$.

№ 61. За умовою висловлення $p =$„$n \vdots 10 \to n \vdots 5$“, де $n \in \mathbb{N}$, істинне, тобто $n \vdots 10 \Rightarrow n \vdots 5$. З цього висловлення слідують висловлення в), д), е), а рівносильність висловлень у таких: а) $\equiv$ б) $\equiv$ г); д) $\equiv$ е); р $\equiv$ в).

Символічний вигляд для а) — е) такий:

а) $n \vdots 5 \to n \vdots 10$;

б) $n \vdots 5 \to n \vdots 10$;

в) $n \vdots 10 \to n \vdots 5$;

г) $\overline{n \vdots 10} \to \overline{n \vdots 5}$;

д) $\underline{n \vdots 5} \leftrightarrow \underline{n \vdots 10}$;

е) $n \vdots 10 \leftrightarrow n \vdots 5$.

№ 63.

Нехай $P = \{p_1, p_2, ..., p_n, ...\}$ — множина всіх простих чисел. Припустимо, що вона скінченна. Нехай, наприклад, ця множина має k простих чисел, тобто $P = \{p_1, p_2, ..., p_k, ...\}$. Розглянемо число $p = p_1 p_2 ... p_k + 1$. Оскільки $p \notin P$, то p — складене число і тому ділиться на одне з простих чисел з множини P. Разом з тим очевидно, що p не ділиться націло на p_i, де $p_i \in P$ — довільне просте число. А тому p є просте число, тобто $p \in P$. Отримали протиріччя: $p \in P$ і $p \notin P$. Тому припущення неправильне і, отже, множина P всіх простих чисел нескінченна.

№ 64.

б)

Доведемо, що $\lg 5$ — ірраціональне число. Припустимо супротивне, тобто $\lg 5 = \dfrac{m}{n}$ — раціональне число, де $m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}$. Тоді $10^{m/n} = 5$, звідки $10^m = 5^n$. Але очевидно, що $10^m \neq 5^n$. Отримали протиріччя:$10^m = 5^n$ і $10^m \neq 5^n$. Тому припущення неправильне і, отже, $\lg 5$ — ірраціональне число.

№ 66.

Один із варіантів відповіді. „Чи є істиною що те, що в лівій руці монета, еквівалентно тому, що Ви правдива людина?“Якщо фокусник відповість „Так!“, то монета в лівій руці, а якщо — „Ні!“, то монета в правій руці.

№ 67.

Симптом a разом з симптомом b зустрічається тоді, коли є симптом c, а наявність симптому b тягне за собою симптом c. **Вказівка.** Скласти та спростити таку конюнкцію:

$(c \leftrightarrow ab)(bd \to a \vee c)(b\bar{a} \to a \vee c)(b\bar{c} \to \bar{a})$.

Зауваження. Дана вправа ще раз підтверджує, наскільки важлива математична логіка в повсякденній практиці (а не лише в медицині чи в юриспруденції).

№ 68. Висновок логічно правильний. **Вказівка.** Ввести позначення для висловлень

$a =$„А переможе на виборах“;
$b =$„А задоволений“;
$c =$„А поганий борець в передвиборній кампанії“;
$\bar{a} =$„А провалиться на виборах“;
$d =$„А втратить довіру партії“;
$e =$„А необхідно вийти з партії“

та виявити істинність формули

$(a \to b)(b \to c)(\bar{a} \to d)(d \to c)(c \to e) \to e$.

№ 69.

Розв'язано першу та четверту задачу.

3 Елементи алгебри множин

1. Найпростіші поняття про множини та співвідношення між ними.

2. Операції над множинами; діаграми Венна-Ейлера.

3. Основні властивості операцій над множинами; поняття про алгебру множин.

4. Поняття декартового добутку множин та відношення між елементами множин.

5. Питання для самоперевірки засвоєння знань та вправи.

6. Відповіді та вказівки до розв'язання деяких вправ.

3.1 Найпростіші поняття про множини та співвідношення між ними

1. Поняття **множини** є одним з найважливіших, фундаментальних понять сучасної математики. **Це поняття є первісним**. Воно не визначається, а роз'яснюється на конкретних прикладах. Синонімами слова „множина“ можна вважати такі слова, як сукупність, система, клас, збірка тощо. **Говорячи про множину, ми завжди будемо розуміти під цим поняттям певну сукупність деяких об'єктів, розглядаючи її як єдине ціле. Об'єкти, з яких складається множина, називаються елементами цієї множини**.

Наприклад, говорячи про потік студентів на лекції, ансамбль будівель, систему робіт, комплекс вправ, колекцію монет тощо, ми цим самим маємо на увазі множини студентів на лекції, будівель, робіт, вправ, монет тощо. В алгебрі розглядаємо множини натуральних чисел, цілих чисел, раціональних чисел, простих чисел, додатних дійсних чисел, коренів рівняння тощо. В геометрії говоримо про множини трикутників, відрізків, многогранників, сторін многокутника тощо.

2. Вперше теорія множин як математична теорія була створена в кінці 19-го століття німецьким математиком Г. Кантором (1845 — 1918 рр.). Згідно Г. Кантору, множина — це довільна збірка певних різних об'єктів, яка розглядається як єдине ціле, як деякий новий

Мал. 1.3. Георг Кантор (1845 — 1918 роки)

об'єкт.

3. Множини, як правило, будемо позначати великими латинськими буквами: $A, B, C, ...$, а їх елементи — малими латинськими буквами: $a, b, c, ...$

Між множиною та її елементами вводиться неозначуване поняття зв'язку між елементами та множиною — належність (входження) елемента до множини, що позначається символом „$\in$“: $a \in A$ означає, що елемент a належить (входить) до множини A; якщо ж елемент a не належить (не входить) до множини A, то це позначається так: $a \notin A$.

Наприклад, якщо $\mathbb{N}$ — множина натуральних чисел, то маємо: $12 \in \ \mathbb{N}; \quad 4.8 \notin \mathbb{N}$.

Зауваження. З кожною множиною, як правило, зв'язується **поняття предметної змінної**, яка позначається буквою, значеннями якої є елементи цієї множини, **тобто областю зміни**, **областю значень** її є дана множина.

Наприклад, в записі $n \in \mathbb{N}$ будемо розуміти, що n — це натуральна змінна для множини $\mathbb{N}$ натуральних чисел; областю зміни для n є ця множина $\mathbb{N}$ натуральних чисел.

4. Серед множин розрізняють **скінченні множини** і **нескінченні множини**.

Означення 3.1.1. *Множина називається скінченною, якщо вона складається зі скінченного числа елементів; в противному ви-*

падку множина називається нескінченною.

Наприклад, скінченними множинами є:

1. Множина студентів в даній аудиторії на лекції.
2. Множина трицифрових чисел.
3. Множина всіх атомів, з яких складається Земля.

Наприклад, нескінченними множинами є:

1. Множина всіх цілих чисел $\mathbb{Z}$.
2. Множина всіх квадратних рівнянь.
3. Множина всіх циліндрів.

Очевидно, що до скінченних множин можна віднести так звану **порожню множину**, яку позначатимемо символом $\varnothing$. Це така множина, яка не містить жодного елемента.

Наприклад, множина всіх цілих коренів рівняння $4x^2 - 9 = 0$ порожня.

5. Виникає питання про те, як можна задати множину, тобто з'ясувати, з яких елементів вона складається, або охарактеризувати елементи цієї множини так, щоб можна було визначити, належать вони цій множині, чи не належать.

Найбільш поширеними способами задання множин є такі:

1. **Перелік всіх елементів множини**; при записі такої множини, перелічивши її елементи, розставляють фігурні дужки. Цей спосіб зручний, коли записується невелика кількість елементів множини. Нижче подамо **приклади задання множин** за допомогою переліку:
   а) $\{1, 3, 5, 7, 9\}$ — множина всіх непарних цифр;
   б) {Азія, Європа, Америка, Африка, Австралія, Антарктида} — множина всіх материків Землі;
   в) $\{2, 4, 5, 8, 10, ..., 50\}$ — множина всіх парних натуральних чисел від 2 до 50; тут виписані не всі елементи, а тому вжито три крапки;

г) $\{1, 3, 5, 7, ..., 2n-1, ...\}$ — нескінченна множина всіх непарних натуральних чисел; при записі тут вжито натуральну змінну $n \in \mathbb{N}$, де $\mathbb{N}$ — множина всіх натуральних чисел.

2. **Характеристична властивість** — певні правила, які можуть бути виражені словесно або деякою формулою та вказують, з яких елементів утворена дана множина. В результаті відповідний запис для множини A матиме такий вигляд: $A = \{a|P(a)\}$, де $P(a)$ — це те правило, та характеристична властивість, що вказує, з яких елементів складається множина A. Нижче подамо **приклади задання множин** характеристичною властивістю:

   а) $A = \{2n|n \in \mathbb{N}\}$ — множина всіх парних натуральних чисел;

   б) $B = \{n \in \mathbb{N}|9 < n < 100\}$ — множина всіх двоцифрових натуральних чисел;

   в) $C = \{x \in \mathbb{R}|x^4 + 4x^2 + 2 = 0\}$ — множина всіх дійсних коренів рівняння $x^4 + 4x^2 + 2 = 0$;

   г) $D = \{x \in \mathbb{R}|2 \leqslant x \leqslant 5\}$ — множина всіх точок числового відрізка $[2; 5]$;

   д) E — множина всіх раків у Південному Бузі — виражена словесно.

Відмітимо ще раз, що нами **будуть вживатися постійні загальноприйняті стандартні позначення** таких числових множин, як:

$\mathbb{N}$ — множина всіх натуральних чисел;
$\mathbb{Z}$ — множина всіх цілих чисел;
$\mathbb{Q}$ — множина всіх раціональних чисел;
$\mathbb{R}$ — множина всіх дійсних чисел;
$\mathbb{C}$ — множина всіх комплексних чисел;
$[a; b], [a; b), (a; b], (a; b)$ — скінченні числові проміжки.

Зауважимо, що одноелементну множину, яка містить єдиний елемент a, позначатимемо $\{a\}$. Зрозуміло тоді, що записи виду a і $\{a\}$ носять різний зміст. Також **застережемо** про те, що порядок запису елементів у множині не відіграє ролі. Тому, наприклад, записи $\{1, 2, 3\}$ і $\{2, 1, 3\}$ вказують на одну і ту ж саму множину з трьох чисел $1, 2, 3$, які є її елементами. А от запис виду $\{1, 2, 2, 3\}$ уже вважається некоректним, оскільки всі елементи в множині повинні бути різними.

6. Між множинами встановлюються такі два співвідношення: а) **рівність множин**; б) **бути підмножиною**.

Означення 3.1.2. *Множини A і B називаються рівними між собою, якщо вони складаються з одних і тих же елементів, а рівність цих множин записується так: $A = B$.*

Наприклад, $A = B$, де $A = \{2, 3, 4, 5\}$, $B = \{n \in \mathbb{N} | 1 < n < 6\}$; $\{3, -3\} = \{x | x^2 - 9 = 0\}$. Якщо множини A, B нерівні, то позначатимемо таке співвідношення між ними за допомогою $A \neq B$.

Означення 3.1.3. *Множина A_1 називається підмножиною множини A, що символічно позначається у вигляді $A_1 \subset A$, якщо кожен елемент множини A_1 є елементом і множини A; символ $\subset$ часто називають включенням; тоді говорять, що A_1 включається в множину A.*

Приклади.

1. Множина всіх студенток в даній аудиторії є підмножиною всіх присутніх осіб в цій аудиторії.
2. Множина всіх парних чисел є підмножиною всіх цілих чисел.
3. Якщо P — множина всіх паралелограмів, P_1 — множина всіх прямокутників, а K — множина всіх квадратів, то взаємозв'язок між цими множинами символом включення можна виразити так: $K \subset P_1 \subset P$, тобто $(K \subset P_1 \wedge P_1 \subset P)$.

Легко бачити, що між рівністю множин та відношенням бути підмножиною існує такий взаємозв'язок:

$$A = B \equiv (A \subset B \wedge B \subset A);$$

або, що те ж саме,

$$A = B \Leftrightarrow (A \subset B \wedge B \subset A).$$

Відмітимо також і такі очевидні включення для довільної множини A:

$$\varnothing \subset A \subset A.$$

До речі, **множини $\varnothing$ і A називаються невласними підмножинами множини A; всі інші підмножини множини A називаються її власними підмножинами.** Отже, A_1 — власна підмножина множини А, якщо виконуються співвідношення: $\varnothing \neq A_1 \subset A \neq A_1$.

Наприклад, множина $A = \{1, 2, 3\}$ має невласні підмножини, $\varnothing, A$ і такі власні підмножини: $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{1, 2\}$, $\{2, 3\}$, $\{1, 3\}$.

Звертаємо увагу на різницю між символами $\in$ і $\subset$.

Наприклад, $\{1\} \subset \{1, 2, 3\}$, але $1 \in \{1, 2, 3\}$: тут символ $\subset$ вказує на включення між множинами, а символ $\in$ вказує на належність елемента до множини.

Приклад. Вказати всі підмножини множини $A = \{1, \{1\}\}$.

Розв'язання. Всіма підмножинами даної множини є такі: $\varnothing; \{1\}; \{\{1\}\}; \{1, \{1\}\}$.

7. При вивченні, дослідженні множин, їх елементів, зв'язків між ними, як правило, вводиться фіксована множина, на якій і вивчаються, розглядаються певні множини, підмножини, елементи, зв'язки між ними. Така множина називається **універсальною** і часто позначається буквою U.

В залежності від того кола питань, які досліджуються в тій чи іншій ситуації, в ролі універсальної множини може виступати не одна і та ж сама множина. **Наприклад**, при вивченні математики в молодших класах в ролі універсальної множини виступає множина N натуральних чисел, а при вивченні планіметрії в середніх класах в ролі універсальної множини виступає площина.

Очевидно, що довільна множина A є підмножиною універсальної множини U, тобто виконується включення $A \subset U$.

3.2 Операції над множинами; діаграми Венна-Ейлера

1. Подібно тому, як над висловленнями були введені операції, в результаті яких отримувалися висловлення, над множинами теж введемо ряд аналогічних операцій, в результаті яких отримуватимемо множини.

Нехай $A, B \subset U$ — довільні множини, що взяті з універсальної множини U.

Означення 3.2.1. *Об'єднанням множин A, B називається така множина, що позначається $A \cup B$, з U, яка складається з таких і тільки таких елементів, які належать хоча би одній з множин A, B.*

Символічно це означення об'єднання $A \cup B$ множин A, B матиме такий вигляд:

$$A \cup B \overset{df}{=} \{c | c \in A \vee c \in B\},$$

тобто для довільного елемента $c \in U$ має місце логічна еквівалентність

$$c \in A \cup B \Leftrightarrow (c \in A \vee c \in B)$$

або, як ми знаємо, виконується рівносильність

$$c \in A \cup B \equiv (c \in A \vee c \in B).$$

Іноді операцію об'єднання множин A, B називають додаванням, а відповідний результат при цьому — сумою цих множин, яку позначають так: $A + B$.

Означення 3.2.2. *Перетином множин A, B називається така множина, що позначається $A \cap B$, з U, яка складається з таких і тільки таких елементів, які належать і до множини A, і до множини B одночасно.*

Символічно це означення перетину (а іноді говорять перерізу) $A \cap B$ множин A, B матиме такий вигляд:

$$A \cap B \overset{df}{=} \{c | c \in A \wedge c \in B\},$$

тобто для довільного елемента $c \in U$ має місце логічна еквівалентність

$$c \in A \cap B \Leftrightarrow (c \in A \wedge c \in B)$$

або, як ми знаємо, виконується рівносильність

$$c \in A \cap B \equiv (c \in A \wedge c \in B).$$

Іноді операцію перетину множин A, B називають множенням, а відповідний при цьому результат — добутком цих множин, який позначають так: $A \cdot B$ або AB.

Означення 3.2.3. *Різницею множин A, B, яка утворюється в результаті віднімання множини B від множини A, називається така множина, що позначається $A \setminus B$, з U, яка складається з таких і тільки таких елементів множини A, що не належать множині B.*

Символічно це означення матиме такий вигляд:

$$A \setminus B \overset{df}{=} \{c | c \in A \wedge c \notin B\},$$

тобто для довільного елемента $c \in U$ має місце логічна еквівалентність

$$c \in A \setminus B \Leftrightarrow (c \in A \wedge c \notin B)$$

або, як ми знаємо, виконується рівносильність

$$c \in A \setminus B \equiv (c \in A \wedge c \notin B).$$

Означення 3.2.4. *Доповненням множини A називається така множина, що позначається $\overline{A}$, з U, яка складається з таких і тільки таких елементів універсальної множини U, які не належать множині A.*

Символічно це означення матиме такий вигляд:

$$\overline{A} \overset{df}{=} \{c | c \in U \wedge c \notin A\},$$

тобто для довільного елемента $c \in U$ має місце логічна еквівалентність

$$c \in \overline{A} \Leftrightarrow \{c \in U \wedge c \notin B\},$$

або, як ми знаємо, виконується рівносильність

$$c \in \overline{A} \equiv \{c \in U \wedge c \notin B\}.$$

В силу даних вище означень очевидно, що операції об'єднання, перетину, віднімання множин є **бінарними операціями**, а операція доповнення множини є **унарною операцією**.

Легко бачити, що операція доповнення множини виражається через операцію віднімання множин за допомогою рівності:

$$\overline{A} = U \setminus A,$$

а операція віднімання множин — через операції доповнення та перетину множин такою рівністю:

$$A \setminus B = A \cap \overline{B}.$$

2. Іноді, крім введених вище операцій над множинами, розглядають і **операцію симетричного віднімання множин**, в результаті якої утворюється симетрична різниця цих множин. Відповідне означення матиме наступний вигляд.

Означення 3.2.5. *Симетричною різницею множин A і B називається така множина, що позначається $A - B$, з U, яка складається з таких і тільки таких елементів, які належать одній з цих множин і не належить другій з них.*

Символічно це означення матиме такий вигляд:

$$A - B \overset{df}{=} \{c | (c \in A \wedge c \notin B) \vee (c \notin A \wedge c \in B)\},$$

тобто для довільного елемента $c \in U$ має місце логічна еквівалентність

$$c \in A - B \Leftrightarrow (c \in A \wedge c \notin B) \vee (c \notin A \wedge c \in B),$$

або, як ми знаємо, виконується рівносильність

$$c \in A - B \equiv (c \in A \wedge c \notin B) \vee (c \notin A \wedge c \in B).$$

Легко бачити, що операція симетричного віднімання множин виражається через попередні операції, а саме:

$$A - B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A);$$

$$A - B = (A \cup B) \setminus (AB),$$

причому $A - B = B - A$.

Приклад. Нехай $U = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ — універсальна множина, яка містить всі цифри десяткової системи числення, і $A = \{0, 1, 2, 4, 5\}$, $B = \{2, 3, 4, 5, 9\}$. Вказати, якими будуть множини $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$, $\overline{A}$, $\overline{B}$, $A - B$.

Розв'язання. Використавши означення введених вище операцій над множинами, отримаємо такі результати:

$A \cup B = \{0, 1, 2, 4, 5, 3, 9\}$;
$A \cap B = \{2, 4, 5\}$;
$A \setminus B = \{0, 1\}$;
$B \setminus A = \{3, 9\}$;
$\overline{A} = \{3, 6, 7, 8, 9\}$;
$\overline{B} = \{0, 1, 6, 7, 8\}$;
$A - B = \{0,\ 1,\ 3,\ 9\}$.

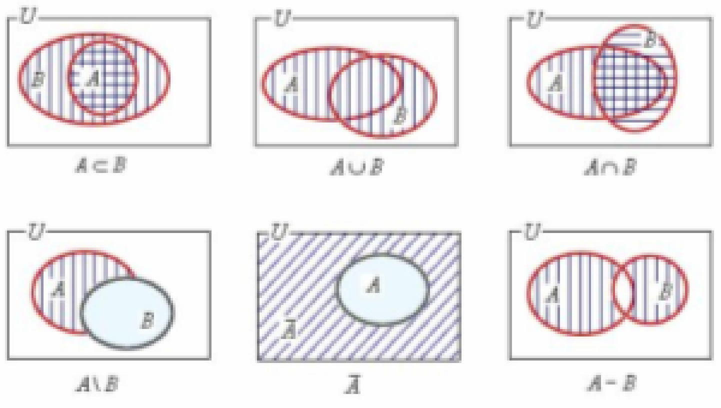
3. Для графічної ілюстрації множин, співвідношень між ними та результатів виконання операцій над множинами використовують так звані **діаграми Венна-Ейлера**, названі в честь англійського математика Венна (1886 — 1921 р.р.) та славнозвісного петербурзького математика Л. Ейлера (1707 — 1783 р.р.).

На цих діаграмах універсальна множина зображається прямокутником, а її підмножини — кругами або овалами в цьому прямокутнику. Тому для зображень співвідношення включення між множинами та результатів виконання операцій над ними отримаємо такі діаграми, як на малюнку 1.4, сторінка 90.

На цих діаграмах результати відповідних операцій над множинами зображено заштрихованими частинами прямокутника.

3.3 Основні властивості операцій над множинами; поняття про алгебру множин

1. Перш ніж перейти до розгляду властивостей введених вище операцій над множинами, домовимось про наступний порядок виконання операцій над множинами, якщо у відповідному записі зустрічається кілька таких різноманітних операцій. Якщо перелічуватимемо операції, починаючи з „найстаршої“ (тобто тієї, що



Мал. 1.4.

виконується в першу чергу), то цей порядок виконання теоретико-множинних операцій матиме такий вигляд:

доповнення;
перетин;
віднімання;
симетричне віднімання;
об'єднання.

Якщо у відповідному записі зустрічаються кілька однакових операцій, то їх виконання проводиться послідовно зліва направо (наприклад, $A \setminus B \setminus C$ означає $(A \setminus B) \setminus C$. Дужки у записі слід залишати, якщо їх відкидання порушує порядок виконання операцій або для полегшення розуміння цього порядку. Відмітимо, що операції, які розміщені в дужках, виконуються в першу чергу. Наприклад, у записі $A \cup BC - (\overline{A}C)$ порядок виконання операцій буде таким, який вказано за допомогою використання додаткових дужок: $A \cup ((BC) - ((\overline{A})C))$.

2. Серед властивостей теоретико-множинних операцій та співвідношень включення між множинами відмітимо наступні з вказівкою відповідних для них назв:

$$A \cap A = A \text{ — ідемпотентність перетину } \cap; \qquad (3.3.1)$$

$$A \cup A = A \text{ — ідемпотентність об'єднання } \cup; \qquad (3.3.2)$$

$$A \cap B = B \cap A \text{ — комутативність перетину } \cap; \qquad (3.3.3)$$

$$A \cup B = B \cup A \text{ — комутативність об'єднання } \cup; \qquad (3.3.4)$$

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) \text{ — асоціативність перетину } \cap; \qquad (3.3.5)$$

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) \text{ — асоціативність об'єднання } \cup; \qquad (3.3.6)$$

$$A(B \cup C) = (AB) \cup (AC) \text{ — дистрибутивність перетину } \cap \text{ відносно об'єднання } \cup; \qquad (3.3.7)$$

$$A \cup (BC) = (A \cup B)(A \cup C) \text{ — дистрибутивність об'єднання } \cup \text{ відносно перетину } \cap; \qquad (3.3.8)$$

$$A \cup \varnothing = A; \qquad (3.3.9)$$

$$A \cap \varnothing = \varnothing; \qquad (3.3.10)$$

$$A \cup U = U; \qquad (3.3.11)$$

$$A \cap U = A; \qquad (3.3.12)$$

$$\overline{\overline{A}} = A; \qquad (3.3.13)$$

$$A \cap \overline{A} = \varnothing; \tag{3.3.14}$$

$$A \cup \overline{A} = U; \tag{3.3.15}$$

$$\overline{U} = \varnothing; \tag{3.3.16}$$

$$\overline{\varnothing} = U; \tag{3.3.17}$$

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B} \text{ — закон де Моргана ;} \tag{3.3.18}$$

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B} \text{ — закон де Моргана ;} \tag{3.3.19}$$

$$A \subset B \Leftrightarrow \overline{B} \subset \overline{A} \Leftrightarrow AB = A \Leftrightarrow A \cup B = B; \tag{3.3.20}$$

$$A = B \Leftrightarrow (A \subset B \wedge B \subset A), \tag{3.3.21}$$

де $A, B, C \subset U$ — довільні множини, взяті з універсальної множини U.

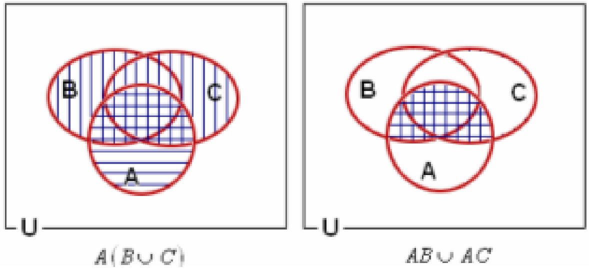
3. Доведення зазначених вище властивостей теоретико-множинних операцій можна провести на основі означень цих операцій, вираження їх через відповідні операції алгебри висловлень, властивостей вказаних відповідних логічних операцій та вираження теоретико-множинної рівності $A = B$ множин A, B через відповідну рівносильність належності елементів цим множинам, тобто рівність $A = B$ означає для всіх елементів $c \in U$ виконання рівносильності $c \in A \equiv c \in B$.

Доведемо, наприклад, властивість (3.3.7) $A(B \cup C) = (AB) \cup \cup (AC)$ — дистрибутивність перетину $\cap$ відносно об'єднання $\cup$ множин.

Доведення. Нехай $x \in U$ — довільний елемент універсальної множини U. Тоді отримаємо такий ланцюжок рівносильностей для цього елемента: $x \in A(B \cup C) \equiv x \in A \wedge x \in (B \cup C) \equiv x \in A \wedge (x \in \in B \vee x \in C) \equiv (x \in A \wedge x \in B) \vee (x \in A \wedge x \in C) \equiv x \in (A \cap B) \vee x \in \in (A \cap C) \equiv x \in (A \cap B) \cup (A \cap C) \equiv x \in (AB \cup AC)$, тобто має місце рівносильність $x \in A(B \cup C) \equiv x \in AB \cup AC$ для довільного елемента $x \in U$, яка і вказує на виконання рівності $A(B \cup C) \equiv AB \cup AC$. Останнє якраз і треба було довести ■

До речі, цю ж саму властивість (3.3.7) можна було би доводити шляхом ланцюжка відповідних рівностей для множин, а саме: $A(B \cup C) = \{x | A(B \cup C)\} = \{x | x \in A \wedge x \in B \cup C\} = \{x | x \in A \wedge (x \in$ $\in B \vee x \in C)\} = \{x | (x \in A \wedge x \in B) \vee (x \in A \wedge x \in C)\} = \{x | x \in$ $\in A \cap B \vee (x \in A \cap C)\} = \{x | x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)\} = AB \cup AC$, з якого і отримується потрібна рівність $A(B \cup C) = AB \cup AC$.

Відмітимо, що властивість (3.3.7) можна продемонструвати на таких двох діаграмах Венна-Ейлера (мал. 1.5):



Мал. 1.5.

Аналогічним чином можна довести решту перелічених вище властивостей теоретико-множинних операцій. До речі, відмітимо, що структура і форма запису перелічених властивостей аналогічні тому, що мало місце для властивостей логічних операцій.

4. Нехай $\mathcal{P}(U)$ — множина всіх підмножин універсальної множини U, тобто $\mathcal{P}(U) \overset{df}{=} \{A | A \subset U\}$.

Введені вище теоретико-множинні операції об'єднання, перетину, доповнення над множинами $A, B \in \mathcal{P}(U)$ можна розглядати як операції, що задані для елементів множини $\mathcal{P}(U)$. Тому ця множина $\mathcal{P}(U)$ з введеними на ній вказаними вище операціями та відношеннями рівності і включеннями, для яких мають місце перелічені вище властивості (3.3.1 — 3.3.21), є алгеброю, яка називається **алгеброю множин**, а ці властивості — **її законами**. Ця алгебра є найпростішою елементарною частиною теорії множин подібно до алгебри висловлень, про яку було відмічено раніше те, що вона є елементарним розділом математичної логіки.

Безперечно, що введення нами алгебри множин здійснено на інтуїтивній неформальній основі. Більш строга побудова алгебри множин здійснюється шляхом введення відповідних аксіом, які формально описують неозначувані поняття елементів, множин та зв'язків між ними.

5. Відмітимо, що на основі відмічених вище властивостей (3.3.1 — 3.3.21) теоретико-множинних операцій можна зробити висновок про те, що **операції об'єднання і перетину множин можна назвати двоїстими між собою** подібно до логічних операцій диз'юнкція і кон'юнкція. Виявляється, що в силу таких властивостей для алгебри множин, як і для алгебри висловлень, має місце **принцип** (або, говорять, **закон**) двоїстості, який має важливе застосування для практичного використання. Цей принцип можна сформулювати таким твердженням: **теоретико-множинна рівність, яка може містити лише операції об'єднання, перетину і доповнення, не порушиться, якщо всі операції об'єднання та перетину відповідно замінити на операції перетину та об'єднання, а множини** $\varnothing, U$ **— відповідно на** $U, \varnothing$. Інше рівносильне формулювання цього принципу має такий вигляд: **Має місце теоретико-множинна рівність** $\overline{\Phi(A, B, ...)} = \Phi^*(\overline{A}, \overline{B}, ...)$, **якщо в ній можуть міститися лише операції об'єднання, перетину і доповнення, а запис** $\Phi^*(\overline{A}, \overline{B}, ...)$ **отриманий з запису** $\Phi(A, B, ...)$ **відповідно послідовною заміною всіх операцій об'єднання, перетину на операції перетину, об'єднання, де** $A, B, ...$ **— довільні множини**.

6. Безперечно, що алгебра множин, як і алгебра висловлень, має надзвичайно широкі застосування як в різноманітних розділах математики, так і в різноманітних прикладних науках, в техніці, економіці, в медицині тощо. Загальні закони теорії множин використовуються в наукових і прикладних дослідженнях. Відома група французьких математиків під псевдонімом Бурбакі по суті описали майже всю сучасну математику, виходячи з теорії множин та її елементарної частини — алгебри множин.

7. Використовуючи розглянуті вище закони (3.3.1 — 3.3.21) алгебри множин, можна розв'язувати різноманітні задачі, пов'язані зі спрощенням теоретико-множинних виразів, з доведенням теоретико-множинних тотожностей, комбінаторні задачі, задачі на розв'язання теоретико-множинних рівнянь та включень тощо. Розглянемо деякі з них.

Задача 1. Розв'язати теоретико-множинні рівняння:

а) $A \cup X = A$; в) $A \cup X = B$;
б) $A \cap X = A$; г) $A \cap X = B$,

якщо множини $A, B \subset U$ — задані, а множина $X \subset U$ невідома.

Розв'язання. Використавши означення об'єднання та перетину множин, отримаємо:

а) В рівнянні $A \cup X = A$ очевидно розв'язок X завжди існує; в ролі X можна взяти довільну множину таку, що задовольняє умову $\varnothing \subset X \subset A$.

б) В рівнянні $A \cap X = A$ розв'язок X теж завжди існує; в ролі X можна взяти довільну множину X таку, що задовольняє умову $A \subset X \subset U$.

в) Рівняння $A \cup X = B$, легко бачити, не завжди має розв'язки. Якщо $B \subset A$ і $B \neq A$, то очевидно, що це рівняння не має розв'язків. Розв'язки будуть в тому випадку, коли $A \subset B$. Тоді в ролі розв'язка X можна взяти довільну множину X, яка задовольняє умову $B \setminus A \subset X \subset B$.

г) Якщо $A = B$, то рівняння $A \cap X = B$ має безліч розв'язків виду $A \subset X \subset U$; якщо $B \subset A \wedge B \neq A$, то очевидно $X = B$; якщо ж $A \subset B \wedge A \neq B$, то рівняння $A \cap X$ не має розв'язків.

Задача 2. Довести тотожність:

$$\overline{A}C \cup \overline{B}C \cup CD \cup ABC\overline{D} = C.$$

Доведення. Використавши основні закони алгебри множин, спростимо ліву частину рівності. Доведення завершиться, якщо в результаті спрощення отримаємо множину C. Отже, маємо: $\overline{A}C \cup \cup \overline{B}C \cup CD \cup ABC\overline{D} = C\overline{A} \cup C\overline{B} \cup CD \cup CAB\overline{D} = C(\overline{A} \cup \overline{B} \cup D \cup AB\overline{D}) = = C(\overline{A} \cup \overline{B} \cup D \cup A)(\overline{A} \cup \overline{B} \cup D \cup B)(\overline{A} \cup \overline{B} \cup D \cup \overline{D}) = C((\overline{A} \cup A) \cup \overline{B} \cup \cup D)(\overline{A} \cup (\overline{B} \cup B) \cup D)(\overline{A} \cup \overline{B} \cup (D \cup \overline{D})) = C(U \cup (\overline{B} \cup D))(U \cup (\overline{A} \cup$

$\cup D))((\overline{A} \cup \overline{B}) \cup U) = CUUU = CU = C$, що і вказує на те, що запропонована тотожність доведена ■

Задача 3. Спростити теоретико-множинний вираз:

$$\overline{A}BC\overline{D} \cup \overline{A \cup \overline{B} \cup C} \cup \overline{A \cup \overline{B} \cup \overline{CD}}.$$

Розв'язання. На основі законів алгебри множин маємо наступний ланцюжок рівносильних перетворень: $\overline{A}BC\overline{D} \cup \overline{A \cup \overline{B} \cup C} \cup$ $\cup \overline{A \cup \overline{B} \cup \overline{CD}} = \overline{A}BC\overline{D} \cup \overline{A} \cap \overline{\overline{B}} \cap \overline{C} \cup \overline{A} \cap \overline{\overline{B}} \cap \overline{\overline{CD}} = \overline{A}BC\overline{D} \cup \overline{A}B\overline{C} \cup$ $\cup \overline{A}BCD = B\overline{A}C\overline{D} \cup B\overline{A}\,\overline{C} \cup B\overline{A}CD = B\overline{A}(C\overline{D} \cup \overline{C} \cup CD) = B\overline{A}((C\overline{D} \cup$ $\cup \overline{C}) \cup CD) = B\overline{A}((C \cup \overline{C})(\overline{D} \cup \overline{C}) \cup CD) = B\overline{A}(U(\overline{D} \cup \overline{C}) \cup CD) =$ $= B\overline{A}((\overline{D} \cup \overline{C}) \cup CD) = B\overline{A}((\overline{D} \cup \overline{C} \cup C)(\overline{D} \cup \overline{C} \cup D)) = B\overline{A}(\overline{D} \cup (\overline{C} \cup$ $\cup C))((\overline{D} \cup D) \cup \overline{C}) = B\overline{A}(D \cup U)(U \cup \overline{C}) = B\overline{A}UU = B\overline{A}U = \overline{A}B$. В результаті рівносильних перетворень заданий теоретико-множинний вираз спростився до виразу $\overline{A}B$, який уже подальшому спрощенню очевидно не піддається.

Задача 4. При тестуванні 380 абітурієнтів інституту були запропоновані задачі з алгебри, з геометрії та з елементів математичного аналізу. З алгебри задачі розв'язали 265 абітурієнтів, з геометрії — 245, з математичного аналізу — 260. При цьому задачі з алгебри і геометрії розв'язали 180 абітурієнтів, з алгебри і математичного аналізу — 150, з геометрії і математичного аналізу — 120, а 90 абітурієнтів розв'язали задачі з усіх трьох розділів. Скільки абітурієнтів не розв'язали жодної задачі?

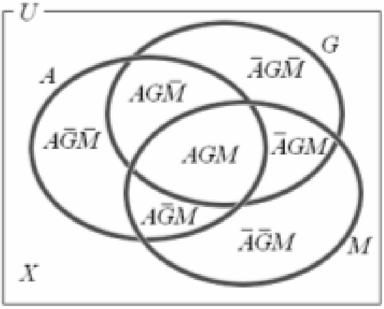
Розв'язання. Зобразимо у вигляді кругів на діаграмі Венна-Ейлера і позначимо множини абітурієнтів, які розв'язували задачі з алгебри — буквою A, з геометрії — буквою G, з математичного аналізу — M. Роль універсальної множини U тут гратиме множина всіх абітурієнтів, яка зображена прямокутником, а через X позначимо множину тих абітурієнтів, які не розв'язали жодної задачі (мал. 1.6).

Тоді множина U буде об'єднанням таких множин, які попарно не перетинаються:

$A \cap \overline{G} \cap \overline{M}$ — множина всіх абітурієнтів, які розв'язали лише задачі з алгебри;

$\overline{A} \cap G \cap \overline{M}$ — множина всіх абітурієнтів, які розв'язали лише задачі з геометрії;

$\overline{A} \cap \overline{G} \cap M$ — множина всіх абітурієнтів, які розв'язали лише задачі



Мал. 1.6.

з математичного аналізу;
$X = \overline{A} \cap \overline{G} \cap \overline{M}$ — множина всіх абітурієнтів, які не розв'язали жодної задачі;
$A \cap G \cap \overline{M}$ — множина всіх абітурієнтів, які розв'язали лише задачі з алгебри і геометрії;
$A \cap \overline{G} \cap M$ — множина всіх абітурієнтів, які розв'язали лише задачі з алгебри і математичного аналізу;
$\overline{A} \cap G \cap M$ — множина всіх абітурієнтів, які розв'язали лише задачі з геометрії і математичного аналізу;
$A \cap C \cap M$ — множина всіх абітурієнтів, які розв'язали задачі з усіх трьох розділів.

Оскільки, як відомо, кількість елементів об'єднання скінченних множин, які попарно не перетинаються, дорівнює сумі кількостей елементів всіх цих множин, то отримаємо таке рівняння: $|X| + |A \cap G \cap M| + |A \cap G \cap \overline{M}| + |A \cap \overline{G} \cap M| + |\overline{A} \cap G \cap M| + |\overline{A} \cap \overline{G} \cap M| + |\overline{A} \cap G \cap \overline{M}| + |A \cap \overline{G} \cap \overline{M}| = |U|$ де $|T|$ — це кількість елементів скінченної множини T. Розв'язавши отримане рівняння, матимемо: $x + 90 + (180 - 90) + (120 - 90) + (150 - 90) + (245 - 180 - (180 - 90)) + (200 - 150 - (120 - 90)) + (265 - 180 - (150 - 90)) = 380$; $x + 90 + 90 + 30 + 60 + 25 + 20 + 35 = 380$; $x + 350 = 380$; $x = 30$. Отже, $x = |X| = 30$ — кількість тих абітурієнтів, які не розв'язали жодної задачі.

Задача 5. Застосувавши принцип двоїстості, довести тотожність $\overline{(\overline{A} \cup \overline{B} \cup \overline{C})(A \cup \overline{B} \cup \overline{C})}BC = U$.

Доведення. Використавши принцип двоїстості до лівої частини даної тотожності, отримаємо такий ланцюжок рівносильних перетворень: $\overline{(\overline{A} \cup \overline{B} \cup \overline{C})(A \cup \overline{B} \cup \overline{C})BC} = ABC \cup \overline{A}BC \cup \overline{BC} = (A \cup \overline{A})BC \cup \overline{B} \cup \overline{C} = UBC \cup \overline{B} \cup \overline{C} = BC \cup (\overline{B} \cup \overline{C}) = (B \cup \overline{B} \cup \overline{C})(C \cup \overline{B} \cup \overline{C}) = ((B \cup \overline{B}) \cup \overline{C})((C \cup \overline{C}) \cup \overline{B}) = (U \cup \overline{C})(U \cup \overline{B}) = UU = U$, чим і завершується доведення вказаної тотожності ■

3.4 Поняття декартового добутку множин та відношення між елементами множин

1. В теорії множин важливу роль відіграють поняття впорядкованих пар, впорядкованих трійок і т. д. елементів, взятих з певних множин.

Якщо з елементів a, b утворити множину, то порядок розміщення запису в ній елементів, якщо $a \neq b$, не грає ролі, тобто вважається, що виконується рівність $\{a, b\} = \{b, a\}$. З цих же елементів a, b можна утворити нові об'єкти, які ми назвемо **впорядкованими парами елементів** і позначимо їх у вигляді $(a; b)$, $(b; a)$. При цьому рівність $(a; b) = (b; a)$ має місце в тому випадку, коли $a = b$. Впорядковані пари є елементами нової множини — так званого **декартового добутку множин**.

Означення 3.4.1. *Декартовим (або прямим) добутком двох множин A і B називається множина $A \times B$ всіх впорядкованих пар елементів $(a; b)$ таких, що $a \in A$, $b \in B$; отже, символічно маємо таке означення декартового добутку $A \times B$ множин A і B:*

$$A \times B \overset{df}{=} \{(a; b) | a \in A \wedge b \in B\}.$$

Дана назва декартового множення множин взята в честь відомого французького математика Рене Декарта (1596 — 1650 р.р.).

2. Аналогічно вводиться поняття декартового добутку трьох множин A, B і C, який складається з впорядкованих трійок елементів цих множин, що можна символічно означити у вигляді рівності

$$A \times B \times C \overset{df}{=} \{(a; b; c) | a \in A \wedge b \in B \wedge c \in C\}.$$

Мал. 1.7. Рене Декарт (1596 — 1650 роки)

Узагальненям введеного декартового добутку двох, трьох множин є поняття декартого добутку $A_1 \times A_2 \times ... \times A_n$ n множин $A_1, A_2, ..., A_n$, що символічно визначається такою рівністю

$$A_1 \times A_2 \times ... \times A_n \overset{df}{=} \{(a_1; a_2; ...; a_n) | a_1 \in A_1 \wedge a_2 \in A_2 \wedge ...a_n \in A_n\},$$

в якій елементи $a_1, a_2, ..., a_n$ впорядкованої n-ки часто називають відповідно першою компонентою, другою компонентою,..., n-ою компонентою цієї $n-$ки (замість слова „**компонента**“ часто вживають слово „**координата**“).

Відмітимо, що із впорядкованими парами, трійками елементів доводилось зустрічатися в шкільній математиці, коли мали справу з координатами точок на площині, в просторі (згадаймо, наприклад, що точки $M_1(3;5)$ і $M_2(5;3)$ — це різні точки координатної площини, яким відповідають різні впорядковані пари чисел (3; 5), (5; 3)).

3. Частинним випадком декартового добутку множин є **декартовий степінь множини**. В результаті маємо так званий **декартів квадрат** $A \times A$, **декартовий куб** $A \times A \times A$, **декартовий n-ий степінь** $A \times A \times ... \times A$ множини A.

Якщо $\mathbb{R}$ — множина всіх дійсних чисел, то $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ розглядається як декартова координатна площина, а $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ — як декартовий координатний тривимірний дійсний простір.

Іноді декартів квадрат $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ називають **арифметичною дво-**

вимірною площиною, а декартовий куб $\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ — **арифметичним тривимірним простором**.

4. Надалі важливу роль відіграватиме поняття **відношення між елементами**, за допомогою якого розкриватиметься смисл поняття **зв'язку між цими елементами**.

Означення 3.4.2. *n-арним відношенням між елементами множин $A_1, A_2, ..., A_n$ називається підмножина φ декартового добутку $A_1 \times A_2 \times ... \times A_n$ цих множин, тобто: — φ — n-арне відношення між елементами множин $A_1, A_2, ..., A_n \overset{df}{\Longleftrightarrow} \varphi \subset A_1 \times \times A_2 \times ... \times A_n$,а самі множини $A_1, A_2, ..., A_n$ називаються базисними множинами цього відношення φ.*

Якщо $n = 2, 3$, то відповідні відношення $\varphi \subset A_1 \times A_2$, $\psi \subset \subset A_1 \times A_2 \times A_3$ називаються **бінарними**, відповідно **тернарними відношеннями**. Те, що $(a_1; a_2) \in \varphi$, іноді відмічають, що елемент a_1 знаходиться у відношенні (зв'язку) φ з елементом a_2, і записують так: $a_1 \varphi a_2$.

Якщо $A_1 = A_2 = ... = A_n = A$, то відповідне n-арне відношення

$$\varphi \subset \underbrace{A \times A \times A \times ... \times A}_{n}$$

часто називають **однорідним** або **n-арним відношенням між елементами множини A**.

5. В практичних застосуваннях найчастіше використовуються бінарні та тернарні відношення. Для них часто вживаються певні позначення та назви.

Приклади.

1. $\leqslant \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R} \overset{df}{=} \{(x;y)|x, y \in \mathbb{R} \wedge x \leqslant y\}$ — відношення „не більше", яке задане на множині R дійсних чисел.

2. $- \quad \subset \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N} \overset{df}{=} \{(m;n;k)|m, n, k \in \mathbb{N} \wedge m - n = k\}$ — віднімання натуральних чисел.

3. $f \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R} \overset{df}{=} \{(x;y)|x, y \in \mathbb{R} \wedge y = x^2\}$ — дійсна квадратична функція.

На завершення відмітимо, що більш детальніше відношення, особливо бінарні відношення, будуть розглянуті пізніше, в спеціальній темі, яка буде повністю присвячена їм.

3.5 Питання для самоперевірки засвоєння знань та вправи

1. Що розуміють під множиною?
2. Як називаються об'єкти, з яких складається множина?
3. Наведіть приклади множин.
4. Хто вважається творцем теорії множин?
5. Як прийнято позначати множини та їх елементи?
6. Як позначається те, що елемент належить або не належить множині?
7. Що таке предметна змінна та область її значень?
8. Які множини називаються скінченними, нескінченними?
9. Наведіть приклади скінченних множин, нескінченних множин.
10. Що таке порожня множина та як вона позначається?
11. Наведіть приклади множин, які є порожніми.
12. Які Ви знаєте способи задання множин?
13. В чому полягає спосіб задання множини переліком її елементів та як він записується?
14. Наведіть приклади задання множини переліком її елементів.
15. В чому полягає спосіб задання множини її характеристичною властивістю та як він записується?
16. Наведіть приклади задання множини її характеристичною властивістю.
17. Чи можна скінченну множину задати характеристичною властивістю?
18. Чи можна нескінченну множину задати переліком її елементів?

19. Чи будь-яку множину можна задати переліком її елементів? Підтвердіть свою відповідь конкретними прикладами та відповідною аргументацією.

20. Які Ви знаєте стандартні позначення деяких числових множин?

21. Чому запис $\{a, b, b, d\}$ вважається некоректним при заданні скінченної множини?

22. Які множини називаються рівними, нерівними?

23. Як позначається рівність, нерівність множин?

24. Яка множина називається підмножиною для заданої множини?

25. Як по-іншому називають зв'язок „бути підмножиною“ для множин? Як цей зв'язок позначають?

26. Наведіть приклади підмножин даної множини.

27. Який Ви знаєте взаємозв'язок між рівністю множин і включенням цих множин, та як цей взаємозв'язок можна символічно записати?

28. Що таке: а) власна підмножина; б) невласна підмножина для заданої множини?

29. Як записати символом включення взаємозв'язок між власними та невласними підмножинами даної множини?

30. Яка множина називається універсальною та як вона позначається?

31. Пояснити на конкретних прикладах, як може видозмінюватися поняття універсальної множини.

32. Який взаємозв'язок існує між універсальною множиною та тими множинами, що розглядаються на універсальній множині?

33. Які Ви знаєте операції над множинами та як вони позначаються?

34. Що таке об'єднання двох множин та як воно позначається?
35. Що таке перетин двох множин та як він позначається?
36. Як символічно записати означення перетину двох множин?
37. Які ще іноді вживаються назви для об'єднання та перетину двох множин?
38. Що таке різниця двох множин та як вона позначається?
39. Як символічно записати означення різниці двох множин?
40. Що таке доповнення множини та як воно позначається?
41. Як символічно записати означення доповнення множини?
42. Що таке симетрична різниця двох множин та як вона позначається?
43. Як символічно записати означення симетричної різниці двох множин?
44. Чому деякі теоретико-множинні операції називаються бінарними, а деякі – унарними?
45. Як операцію доповнення множини виразити через операцію віднімання множин?
46. Як операцію віднімання множин виразити через операції доповнення та перетину множин?
47. Як операцію симетричного віднімання множин виразити через операції віднімання та об'єднання множин?
48. Як операцію симетричного віднімання множин виразити через операції об'єднання, перетину та віднімання?
49. Що таке діаграма Венна-Ейлера та як зображаються множини на цій діаграмі?
50. Як на діаграмі Венна-Ейлера зображаються співвідношення включення між множинами та результати операцій над ними?

51. Який порядок виконання теоретико-множинних операцій встановлюється над множинами?

52. Яку роль відіграють дужки при встановленні порядку виконання теоретико-множинних операцій?

53. Які Ви знаєте основні властивості теоретико-множинних операцій та як називають іноді ці властивості?

54. Який вигляд має закон ідемпотентності для операцій об'єднання та перетину множин?

55. Який вигляд має комутативний закон для операцій об'єднання та перетину множин?

56. Який вигляд має асоціативний закон для операцій об'єднання та перетину множин?

57. Який вигляд має закон дистрибутивності перетину відносно об'єднання множин?

58. Який вигляд має закон дистрибутивності об'єднання відносно перетину множин?

59. Яку роль відіграють порожня множина та універсальна множина при здійсненні операцій перетину, об'єднання та доповнення множин?

60. Який вигляд мають закони де Моргана для теоретико-множинних операцій?

61. Як виражається включення множин через операції доповнення, перетину та об'єднання цих множин?

62. Яким шляхом можна доводити основні властивості теоретико-множинних операцій?

63. Проілюструйте на діаграмах Венна-Ейлера основні властивості теоретико-множинних операцій?

64. Що таке алгебра множин?

65. Чому основні властивості теоретико-множинних операцій часто називають законами алгебри множин?

66. Які дві теоретико-множинні операції називаються двоїстими між собою в алгебрі множин і чому?

67. В чому полягає принцип двоїстості в алгебрі множин? Сформулюйте обидва твердження, які розкривають цей принцип.

68. Як пояснити, на чому основана справедливість вказаного вище принципу двоїстості в алгебрі множин?

69. Що таке теоретико-множинні рівняння?

70. Як доводяться теоретико-множинні тотожності? Наведіть ілюструючий приклад.

71. Як можна спрощувати заданий теоретико-множинний вираз? Наведіть ілюструючий приклад.

72. Наведіть приклади доведення теоретико-множинних тотожностей та спрощення теоретико-множинних виразів з використанням принципу двоїстості.

73. Вкажіть, яка існує аналогія при введенні теоретико-множинних операцій з операціями алгебри висловлень.

74. В чому проявляється аналогія основних законів алгебри висловлень і алгебри множин?

75. Вкажіть на аналогію в принципах двоїстості в алгебрі висловлень і в алгебрі множин.

76. Що таке впорядкована пара, трійка елементів та як вони позначаються?

77. Що таке декартів добуток двох множин, трьох множин та як його символічно записати?

78. Що таке декартів добуток n множин та як його символічно записати?

79. Що таке декартів квадрат, куб, степінь множини?

80. Що таке двовимірна арифметична площина, тривимірний арифметичний простір?

81. Що таке n-арне відношення між елементами n множин?

82. Які відношення називаються бінарними, тернарними?

83. Що таке однорідне відношення?

84. Наведіть приклади бінарних відношень, тернарних відношень.

85. Нехай T — множина тварин. Чи належать цій множині а) козел; б) вовк; в) акація; г) хвіст лисиці; д) мураха; е) лисиця? Запишіть множину T, переліком.

86. Нехай $\mathbb{N}$ — множина натуральних чисел; $2Z$ — множина парних цілих чисел; P — множина простих чисел. За допомогою символів $\in, \notin$ вказати, які з наступних чисел є елементами або ж не є елементами вказаних множин: $13, 2, -4, 15, -7, -2$.

87. Задати наступні множини за допомогою характеристичної властивості:
    а) $\{11, 22, 44, 99, 33, 77, 55, 66, 88\}$;
    б) {і, ї, о, а, е, є, и, у, ю, я};
    в) $\{-6, -4, -2, 0, 4, 6, 2, -8, 8\}$.

88. Наведіть приклад такої одноелементної множини A, щоб її елемент був одночасно підмножиною цієї множини A.

89. Задайте наступні множини переліком своїх елементів:
    а) $\{x | x \in \mathbb{N} \wedge -3 < 2x \leqslant 8\}$;
    б) $\{x | x \in \mathbb{N} \wedge x \vdots 10 \wedge x$ не ділиться націло на $25 \wedge x \leqslant 100\}$.

90. Наведіть приклади таких множин A, B, C, щоб $A \in B, B \in C$ і $A \notin C$.

91. З'ясувати, які з наступних множин рівні між собою:
    A — множина прямокутників з рівними сторонами;
    B — множина квадратів;
    C — множина прямокутників;

D — множина чотирикутників з рівними кутами;
E — множина ромбів;
G — множина паралелограмів з прямим кутом;
H — множина чотирикутників з рівними сторонами.

92. Нехай $M_n = \{1, 2, 3, ..., n\}$, де $n \in \mathbb{N}$ — натуральне число. Знайти кількість всіх підмножин множин M_1, M_2, M_3, M_n. Скільки k−елементних підмножин має M_n?

93. Вкажіть приклад такої множини A_n, де $n \in \mathbb{N}$ — натуральне число, більше одиниці, що для кожної пари елементів множини A_n один із елементів є членом другого.

94. Нехай в ролі універсальної множини взято множину $\mathbb{Z}$ цілих чисел. Вказати, що собою представляють множини $A, \overline{A \cup B}, \overline{B}, \overline{A \cap B}, \overline{C}, A \setminus B, A \setminus \overline{C}, C \setminus (A \cup B)$, якщо $A = 2\mathbb{Z} = \{2n | n \in \mathbb{Z}\}$, $B = 2Z - 1 = \{2n - 1 | n \in \mathbb{Z}\}$, $C = \{n \in \mathbb{Z} | n \leqslant 10\}$.

95. Описати такі множини:
а) $2Z \cap 3Z$;
б) $2Z \cup 3Z$;
в) $2Z \cap \overline{3Z}$;
г) $\overline{2Z} \cup \overline{3Z}$;
д) $3Z \setminus 2Z$;
е) $2Z \setminus 3Z$, якщо множина $\mathbb{Z}$ всіх цілих чисел грає роль універсальної множини, а $kZ = \{kn | n \in \mathbb{Z}\}, k \in \mathbb{N}$.

96. Довести рівність $(A \setminus B) \setminus C = (A \setminus C) \setminus (B \setminus C)$, де A, B, C — довільні множини.

97. Показати, що має місце рівносильність $AB \cup C = A(B \cup C) \equiv \equiv C \subset A$ для будь-яких множин A, B, C.

98. Спростити теоретико-множинні вирази:
а) $A \cap \overline{B} \cup \overline{A} \cap B \cup A \cap B$;
б) $\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C} \cup A \cap \overline{B} \cup \overline{B} \cap C \cup \overline{A} \cap \overline{B} \cap C$;
в) $\overline{A} \cap C \cup \overline{A} \cap \overline{B} \cap C \cup A \cap \overline{B} \cup A \cap B$;
г) $\overline{A \cup B \cup C} \cup A \cap \overline{B} \cap \overline{C} \cup \overline{\overline{B} \cup C}$.

99. Перевірити виконання теоретико-множинних тотожностей для будь-яких множин $A, B, C, D \subset U$:

а) $(AB \cup CD \cup A \cup C)\overline{A} \cup \overline{A}\,\overline{C} = \overline{A}$;
б) $(\overline{A} \cup \overline{BC})(A \cup \overline{BC}) = \overline{B} \cup \overline{C}$;
в) $A\overline{B}\,\overline{C}D \cup A\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D} \cup A\overline{B}C \cup AB = A$;
г) $ABCD \cup ABC\overline{D} \cup AB\overline{C} \cup \overline{A}B = B$.

100. Довести теоретико-множинні рівності:
а) $A - (B - C) = (A - B) - C$;
б) $A(B - C) = AB - AC$,
де $A, B, C \subset U$ — довільні множини.

101. Відомо, що із 100 студентів першого курсу в спортивних секціях беруть участь: в гімнастичній секції — 28, в волейбольній — 42, в баскетбольній — 30, в волейбольній і баскетбольній — 5, в гімнастичній і волейбольній — 10, в гімнастичній і баскетбольній — 8, в усіх трьох секціях — 3. Знайти кількість студентів, які: а) беруть участь тільки в одній волейбольній секції; б) не беруть участі ні в жодній секції.

102. У звіті про вивчення студентами іноземних мов було написано, що:
а) англійську, французьку і німецьку мови вивчають 5 студентів;
б) англійську і німецьку — 10;
в) англійську і французьку — 8;
г) німецьку і французьку — 20;
д) англійську — 30;
е) німецьку — 23;
є) французьку — 50.
Знайти помилку у звіті.

103. (Задача Льюїса Керрола). У жорстокому бою 70 із 100 піратів втратили одне око, 75 — одне вухо, 80 — одну руку і 85 — одну ногу. Яке мінімальне число тих, хто втратив одночасно око, руку, вухо і ногу?

104. Кожна із 30 наречених красива, вихована чи розумна. Вихованих наречених — 21, красивих — 18, розумних — 15, красивих і вихованих — 11, розумних і вихованих — 9, розумних і красивих — 7. Скільки наречених, які мають всі три якості, і скільки наречених з єдиною якістю?

105. Виразити через основні теоретико-множинні операції об'єднання, перетину та доповнення таку операцію над множинами:

$$A \updownarrow B \overset{df}{=} \{c \in U \mid c \in A \leftrightarrow c \in B\}.$$

Перевірити, чи ця операція володіє властивостями комутативності, асоціативності, ідемпотентності, та вказати вигляд цієї операції на діаграмі Венна-Ейлера. Чи має введена операція зв'язки з операціями віднімання та симетричного віднімання?

106. * Виразити через основні теоретико-множинні операції об'єднання, перетину, доповнення такі операції над множинами:

$$A \downdownarrows B \overset{df}{=} \{c \in U \mid c \in A \downarrow c \in B\};$$

$$A \parallel B \overset{df}{=} \{c \in U \mid c \in A \mid c \in B\},$$

де $\downarrow$ — символ Лукасевича, $|$ — штрих Шиффера, та дослідити, чи володіють вони властивостями комутативності, асоціативності, ідемпотентності; вказати вигляд цих операцій на діаграмах Венна-Ейлера. Виразити через введені операції основні теоретико-множинні операції.

107. * Розв'язати системи теоретико-множинних рівнянь: а) $\begin{cases} A \cup X = B; \\ A \cap X = C; \end{cases}$ б) $\begin{cases} A \setminus X = B; \\ X \setminus A = C, \end{cases}$ де $A, B, C \subset U$ — задані множини.

108. * Розв'язати теоретико-множинне рівняння:

$$AX \cup B\overline{X} = CX \cup D\overline{X},$$

де $A, B, C, D \subset U$ — задані множини.

109. * З'ясувати, чи існує таке сімейство множин $(A_i)_{i \in I}$, що перетин довільного їх скінченного числа є непорожньою множиною, а перетин всіх множин сімейства — порожня множина.

3.6 Відповіді та вказівки до розв'язання деяких вправ

№ 85.

T={козел, вовк, лисиця}.

№ 86.

$13, 2, 15 \in \mathbb{N}$; $2, -4, -2 \in 2Z$; $13, 2 \in P$.

№ 87.

а) Множина всіх двоцифрових натуральних чисел, кратних 11;

б) множина всіх голосних літер українського алфавіту;

в) множина всіх парних чисел, модуль яких менший 9.

№ 88.

$A = \{\varnothing\}$.

№ 89.

а) $\{1, 2, 3, 4\}$; б) $\{10, 20, 30, 40, 60, 70, 80, 90\}$.

№ 90.

$A = \{1\}$; $B = \{\{1\}\}$; $C = \{\{\{1\}\}\}$.

№ 91.

$A = B$; $C = D = G$; $E = H$.

№ 92.

$|M_1| = 2^1$; $|M_2| = 2^2$; $|M_3| = 2^3$; $|M_n| = 2^n$; C_n^k.

№ 93.

$A_2 = \{1, \{1\}\}$; $A_3 = \{1, \{1\}, \{1, \{1\}\}\}$;

$A_4 = \{1, \{1\}, \{1, \{1\}\}, \{1, \{1\}, \{1, \{1\}\}\}\}$; і т.д.

№ 94.

$A = 2Z = \{2n|n \in \mathbb{Z}\}$ — множина всіх парних цілих чисел; $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B} = \varnothing$, де $B = 2Z - 1 = \{|2n - 1|n \in \mathbb{Z}\}$ — множина всіх непарних цілих чисел; $\overline{A} = B = 2Z - 1$; $\overline{B} = A = 2Z$; $\overline{A \cap B} = \overline{\varnothing} = \overline{A} \cup \overline{B} = B \cup A = \mathbb{Z}$; $\overline{C} = \mathbb{Z} \setminus C = \{n \in \mathbb{Z}|n > 10\} = \{11, 12, 13, ...\}$; $A \setminus B = A \cap \overline{B} = A \cap \overline{B} = A \cap A = A$; $A \setminus \overline{C} = A \cap \overline{\overline{C}} = A \cap C = \{2n|n \in \mathbb{Z} \wedge 2n \leqslant 10\} = \{2n|n \in \mathbb{Z} \wedge n \leqslant 5\}$; $C \setminus (A \cup B) = C \setminus Z = \varnothing$.

№ 95.

а) $2Z \cap 3Z = 6Z$;

б) $2Z \cup 3Z = 2Z \cup (6Z + 3)$;

в) $2Z \cap \overline{3Z} = 2Z \setminus 3Z$ — множина всіх парних цілих чисел, які не діляться на 3;

г) $\overline{2Z} \cup \overline{3Z} = \overline{6Z}$ — множина всіх цілих чисел, які не діляться на 6;

д) $3Z \setminus 2Z = 6Z + 3$ — множина всіх чисел, які при діленні на 6 дають остачу 3;

е) $2Z \setminus 3Z = 2Z \cap \overline{3Z}$ — множина всіх парних цілих чисел, які не діляться на 3.

№ 96.

$(A \setminus C) \setminus (B \setminus C) = A\overline{C} \setminus B\overline{C} = A\overline{C}\,\overline{B\overline{C}} = A\overline{C}(\overline{B} \cup C) = A\overline{C}\ \overline{B} \cup A\overline{C}C = A\overline{B}\ \overline{C} \cup A\varnothing = A\overline{B}\ \overline{C} \cup \varnothing = (A\overline{B})\overline{C} = (A \setminus B)\overline{C} = (A \setminus B) \setminus C.$

№ 97.

$(AB \cup C = A(B \cup C)) \equiv ((AB \cup AC) \cup C = AB \cup AC) \equiv (C \subset AB \cup AC) \equiv C \subset A(B \cup C) \equiv (C \subset A \wedge C \subset B \cup C) \equiv C \subset A.$

№ 98.

а) $A \cup B$;

б) $\overline{B}$;

в) $A \cup C$;

г) $\overline{C}$.

Вказівка. Використати властивості теоретико-множинних операцій або властивості логічних операцій. Наприклад, а) $A \cap \overline{B} \cup \overline{A} \cap B \cup A \cap B = A\overline{B} \cup \overline{A}B \cup AB = A\overline{B} \cup (\overline{A} \cup A)B = A\overline{B} \cup UB = A\overline{B} \cup B = (A \cup B)(\overline{B} \cup B) = (A \cup B)U = A \cup B$, де U — універсальна множина.

№ 99.

Вказівка. Перевірку можна здійснити за допомогою використання властивостей теоретико-множинних операцій або властивостей логічних операцій. Наприклад, для г) маємо: $ABCD \cup ABC\overline{D} \cup AB\overline{C} \cup \overline{A}B = ABC(D \cup \overline{D}) \cup AB\overline{C} \cup \overline{A}B = ABCU \cup AB\overline{C} \cup \overline{A}B = (ABC \cup AB\overline{C}) \cup \overline{A}B = AB(C \cup \overline{C}) \cup \overline{A}B = ABU \cup \overline{A}B = AB \cup \overline{A}B = (A \cup \overline{A})B = UB = B.$

№ 100.

Вказівка. Доведення можна виконати аналогічно тому, як і в попередній вправі № 99. Наприклад для б) маємо: $A(B - C) = A(B\overline{C} \cup C\overline{B}) = AB\overline{C} \cup A\overline{B}C = (AB\overline{A} \cup AB\overline{C}) \cup (A\overline{A}C \cup A\overline{B}C) = AB(\overline{A} \cup \overline{C}) \cup AC(\overline{A} \cup \overline{B}) = AB\overline{AC} \cup AC\overline{AB} = (AB \setminus AC) \cup (AC \setminus AB) = AB - AC.$

№ 101.

а) 30; б) 20. **Вказівка.** Використати діаграму Венна-Ейлера та скласти відповідну систему лінійних рівнянь.

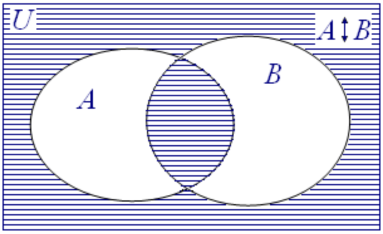
№ 102. **Вказівка.** Задача розв'язується аналогічно до вправи

№ 101. Виявляється, що число студентів, які вивчають тільки німецьку мову, від'ємне — рівне -2, що вказує на помилку у звіті.

№ 103. Мінімальне число рівне 10, а максимальне — 70. **Вказівка.** $|OBRH| = |\overline{\overline{O} \cup \overline{B} \cup \overline{P} \cup \overline{H}}| \geqslant 100 - (30 + 25 + 20 + 15) = 100 - 90 = 10$, де A — множина всіх піратів, що втратили орган „A“, а $|A|$ — число елементів множини A.

№ 104. Три наречених мають усі три якості, а дев'ять тільки єдину якість. **Вказівка.** Скласти систему лінійних рівнянь, використавши умову вправи та діаграму Венна-Ейлера.

№ 105. Вигляд операції $\updownarrow$ на діаграмі Венна-Ейлера зображено на малюнку 1.8. Виражається ця операція через основні теоретико-множинні операції так: $A \updownarrow B = \overline{A - B} = AB \cup \overline{A}\,\overline{B} = AB \cup \overline{A \cup B}$. Введена операція $\updownarrow$ комутативна та асоціативна, але не ідемпотентна.



Мал. 1.8.

№ 106. Операції $\downarrow\downarrow$, $||$ виражаються через основні теоретико-множинні операції так: $A \downarrow\downarrow B = \overline{A \cup B}$; $A||B = \overline{AB}$;

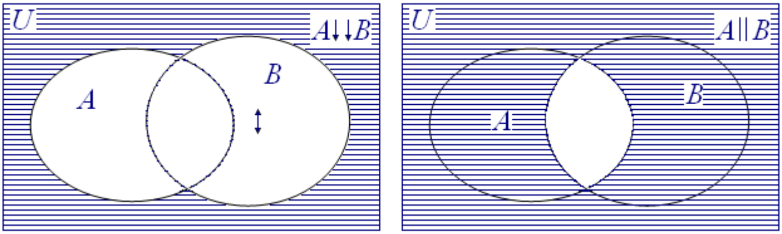
Вказівка. Для розгляду вказаних теоретико-множинних операцій слід використати означення та властивості відповідних логічних операцій — символ Лукасевича $\downarrow$ та штрих Шеффера $|$. Легко бачити їх вигляд на діаграмах Венна-Ейлера (мал. 1.9).

№ 107.

а) Якщо $C \subset A \subset B$, то $C \cup (B \setminus A) \subset X \subset B$;

б) Якщо $C \subset \overline{A} \subset \overline{B}$, то $C \cup X \subset (A \cup C) \setminus B$.

№ 109. Наприклад, сім'я $(\mathbb{N} \setminus M_n)_{n \in \mathbb{N}}$ множин задовольняє умову задачі.



$A \downarrow\downarrow B = \overline{A \cup B}$

$A||B = \overline{AB}$

Мал. 1.9.

4 Елементи логіки предикатів

1. Найпростіші поняття про предикати; рівносильність предикатів, наслідок предиката; пропозиційна функція предиката.

2. Типи предикатів; область істинності предиката та її зв'язок з типом предиката, з рівносильністю, з відношенням.

3. Найпростіші операції над предикатами та зв'язок цих операцій з операціями над відповідними областями істинності цих предикатів.

4. Конкретизація предметних змінних та їх зв'язування кванторами в предикатах; універсальний та екзистенціональний квантори.

5. Формули логіки предикатів; порядок виконання дій; види формул, їх рівносильність та спрощення.

6. Деякі закони логіки предикатів.

7. Застосування логіки предикатів до алгебри множин, до математичних формулювань.

8. Питання для самоперевірки засвоєння знань та вправи.

9. Відповіді та вказівки до розв'язання деяких вправ.

4.1 Найпростіші поняття про предикати; рівносильність предикатів, наслідок предиката; пропозиційна функція предиката

1. Раніше було відмічено, що алгебра висловлень є найпростішою елементарною частиною математичної логіки. Однією з її головних задач є встановлення істинносного значення складного висловлення в залежності від істинносних значень простих висловлень, що утворюють досліджуване складне висловлення. Незважаючи на велике значення алгебри висловлень, її широкі застосування, вона є занадто бідною для дослідження навіть нескладних висновків науки та практики. Розглянемо в підтвердження цього кілька **прикладів**.

1. Очевидно, що з висловлення $a =$„Хоча би один студент в групі розв'язав всі домашні завдання“ випливає висловлення $b =$„Кожну із домашніх задач розв'язав хоча би один студент в групі“, тобто є істиною складне висловлення, яке в алгебрі висловлень має вигляд

$a \to b$; разом з тим в алгебрі висловлень формула $a \to b$ не є істинною. До речі, цією ж формулою $a \to b$ можна подати і таке істинне складне висловлення: „Якщо в числовій множині A існує число, що не перевищує всі її числа, то для кожного числа x в цій множині знайдеться таке число, що не перевищує x“.

2. Очевидно, що істинним є складне висловлення „Якщо в числовій множині $x < y$ і $y < z$, то $x < z$“, якому в алгебрі висловлень відповідає формула $a \wedge b \to c$, яка безперечно не є істинною, де „$a = x < y$“, „$b = y < z$“, „$c = x < z$“.

3. Очевидно, що істинним є такий класичний умовивід Арістотеля, стародавнього грецького філософа і логіка, як: „Якщо всі люди смертні, і Сократ є людина, то Сократ смертний“. Разом з тим висновок, що встановлює істинність висловлення $c =$„Сократ смертний“ з істинності висловлень $a =$„Всі люди смертні“ і $b =$„Сократ є людина“, лежить за межами алгебри висловлень, коли розглядається аналогічна формула $a \wedge b \to c$.

До речі, наведений умовивід Арістотеля, який часто наводиться в багатьох посібниках з логіки, має таку структуру побудови, яку можна наповнювати різноманітним змістом, від чого істинність умовиводу не зміниться. Наведемо його, наприклад, з геометричним змістом та числовим змістом: „Якщо довільний прямокутник є паралелограмом і D — прямокутник, то D — паралелограм“; „Якщо довільне парне число ціле і 12 — парне число, то 12 — ціле число“.

2. Виникає питання, а чому це алгебра висловлень не має засобів для достатньо тонкого аналізу міркувань, який би давав можливість встановлювати їх правомірність. Пояснити це можна тим, що алгебра висловлень розглядає складні висловлення як функції, як залежності лише від простих висловлень. А от ці прості елементарні висловлення в алгебрі висловлень уже не розчленовуються. Разом з тим вони є елементами міркувань і мають свою внутрішню структуру, яка теж відіграє важливу роль в дедукції, в умовиводах та міркуваннях. Тому необхідно так розширити алгебру висловлень, створити більш розширену логічну систему, яка б давала також можливість досліджувати будову, структуру простих елементарних висловлень. Саме такою розширеною логічною системою є **логіка предикатів**, в яку алгебра висловлень входить як складова елементарна частина. Саме в логіці предикатів з'являється можливість легко обґрунтувати логічні висновки та міркування, які були наведені вище.

3. Детальніше зупинимося на одному із найважливіших понять логіки предикатів — на понятті **предиката** (від латинського predicate — присудок). Предикат граматично має форму вираження висловлення, в якому можуть міститися предметні змінні деяких множин (поняття про предметні змінні див. в попередній темі). Таке вираження можна отримати з довільного висловлення, якщо в ньому позначення конкретних даних замінити на предметні змінні тих множин, яким належать ці дані. Розглянемо відповідні приклади.

1. $a =$„5 — просте число" — істинне висловлення; $b =$„8 — просте число" — хибне висловлення. Тоді $P(n) =$ „n — просте число"— це не висловлення, а, говорять, **висловлювальна форма**, де $n \in \mathbb{N}$ — натуральна предметна змінна; це є, говорять, **одномісний** (бо одна предметна змінна) **предикат**, який перетворюється у висловлення при заміні $n \in \mathbb{N}$ на конкретне натуральне число; наприклад, $P(13)$ — істинне висловлення, $P(15)$ — хибне висловлення.

2. Висловлення „Петро — син Василя" перетворюється в **двомісний предикат** $A(x, y) =$„x — син y", де $x, y \in L$ — предметні змінні множини L людей.

3. Висловлення „$3+2.7 = 21.3$" перетворюється в **трьохмісний предикат** $B(x, y, z) =$ „$x + y = z$", в якому $x, y, z \in \mathbb{R}$ — дійсні предметні змінні множини $\mathbb{R}$ дійсних чисел.

З розглянутих прикладів бачимо, що в логіці предикатів здійснюється розчленування простих висловлень на суб'єкти, об'єкти (предметні змінні, дані) і предикати, присудки, що виражають певні властивості об'єктів, зв'язки між ними.

4. Дамо загальне означення **предиката**:

Означення 4.1.1. *n-місним предикатом від n предметних змінних $x_1 \in X_1, x_2 \in X_2, ..., x_n \in X_n$ називається вираз (запис, речення), що містить ці змінні і перетворюється у висловлення при заміні предметних змінних елементами відповідних множин $X_1, X_2, ..., X_n$, які називають базисними множинами предиката.*

Якщо $X_1 = X_2 = ... = X_n = X$, то відповідний предикат називатимемо **однорідним**, який заданий на базисній множині X.

Предикати в загальному вигляді позначатимемо так: $A(x_1, x_2, ..., x_n), B(x_1, x_2, ..., x_n), ...$, де $x_1 \in X_1, x_2 \in X_2, ..., x_n \in \in X_n$ — предметні змінні базисних множин $X_1, X_2, ..., X_n$. Тоді $A(x, y)$, $B(x, y, z)$ — позначення довільних двомісного, тримісного предикатів.

Наприклад, вираз $A(x, y) =$„$x < y$“, де $x, y \in \mathbb{R}$, — однорідний двомісний предикат, заданий на множині $\mathbb{R}$ дійсних чисел, а вираз $B(x, y) =$„$3x - 2y$“, де $x, y \in \mathbb{R}$, не є предикатом, оскільки при підстановці замість предметних змінних x, y конкретних чисел він не перетворюється у висловлення на відміну від $A(x, y)$; дійсно, взявши $x = 3, y = 1$, отримаємо $A(3, 1) =$„$3 < 1$“ — хибне висловлення, а $B(3, 1) =$„$3 \cdot 3 - 2 \cdot 1$“— числовий вираз, що визначає число 7, яке без сумніву не є висловленням.

Зауваження. В логіці предикатів висловлення будемо розглядати як нульмісні предикати, які не містять жодної предметної змінної; наприклад, „14 ділиться на 2“.

5. Як і для висловлень, для предикатів аналогічно вводяться поняття **рівносильності** та **логічного слідування предикатів**.

Означення 4.1.2. *Два n-місні предикати* $A_1(x_1, x_2, ..., x_n)$, $A_2(x_1, x_2, ..., x_n)$, *визначені на одних і тих же базисних множинах* $X_1, X_2, ..., X_n$, *називаються рівносильними між собою, що позначається у вигляді* $A_1(x_1, x_2, ..., x_n) \equiv A_2(x_1, x_2, ..., x_n)$, *якщо їх логічні значення* T *чи* F *на одних і тих же наборах відповідних значень* $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ *предметних змінних* $x_1, x_2, ..., x_n$ *співпадають, тобто* $p(A_1(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)) = p(A_2(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n))$, *або ж не існують.*

Означення 4.1.3. *Предикат* $A_2(x_1, x_2, ..., x_n)$ *називається логічним наслідком предиката* $A_1(x_1, x_2, ..., x_n)$ *або, говорять, логічно слідує з* $A_1(x_1, x_2, ..., x_n)$, *що позначається у вигляді* $A_1(x_1, x_2, ..., x_n) \Rightarrow A_2(x_1, x_2, ..., x_n)$, *якщо обидва предикати визначені на одних і тих же базисних множинах* $X_1, X_2, ..., X_n$, *і на довільних наборах відповідних значень* $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ *предметних змінних* $x_1, x_2, ..., x_n$ *якщо висловлення* $A_1(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ *існує, то і* $A_2(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ *існує, і висловлення* $A_1(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) \to \to A_2(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ *істинне.*

Приклади.

1. Нехай $x \in \mathbb{R}$ — дійсна предметна змінна; легко бачити, що одномісні предикати $4x - 3 \leqslant 5$ і $x \leqslant 2$ рівносильні між собою, тобто $(4x - 3 \leqslant 5) \equiv (x \leqslant 2)$.

2. Нехай $x \in \mathbb{N}$ — натуральна предметна змінна; легко бачити, що предикат $n \vdots 5$ є логічним наслідком предиката $n \vdots 10$, тобто $(n \vdots 10) \Rightarrow (n \vdots 5)$.

Зауваження. Очевидно, що довільні два числові рівняння, які рівносильні в алгебраїчному смислі, будуть рівносильними між собою предикатами.

6. Виникає питання, який зв'язок існує між рівносильністю предикатів та їх логічним слідуванням. Використавши попередні два означення та аналогічний зв'язок між рівносильністю та логічним слідуванням висловлень, робимо висновок про те, що має місце така теорема:

Теорема 4.1.1. *Для того, щоб два предикати були рівносильними між собою, необхідно і достатньо, щоб кожен з них був наслідком другого, тобто на символічній мові це звучить так:* $A_1(x_1, x_2, ..., x_n) \equiv A_2(x_1, x_2, ..., x_n)$ *тоді і тільки тоді, коли* $A_1(x_1, x_2, ..., x_n) \Rightarrow A_2(x_1, x_2, ..., x_n)$ *і* $A_2(x_1, x_2, ..., x_n) \Rightarrow A_1(x_1, x_2, ..., x_n)$*, де* $A_1(x_1, x_2, ..., x_n), A_2(x_1, x_2, ..., x_n)$ *— позначення n-місних предикатів, заданих на одних і тих же базисних множинах* $X_1, X_2, ..., X_n$.

Якщо по аналогії з логічною еквівалентністю висловлень ввести означення **логічної еквівалентності предикатів** з відповідним для неї позначенням у вигляді

$$A_1(x_1, x_2, ..., x_n) \Leftrightarrow A_2(x_1, x_2, ..., x_n),$$

яке читається як „предикати $A_1(x_1, x_2, ..., x_n)$ і $A_2(x_1, x_2, ..., x_n)$ логічно еквівалентні між собою“, то теорему 4.1.1 можна подати на мові логічної еквівалентності предикатів, тобто має місце наступна теорема:

Теорема 4.1.2. *Два предикати рівносильні між собою тоді і тільки тоді, коли вони еквівалентні між собою, що символічно запишеться так:* $A_1(x_1, x_2, ..., x_n) \equiv A_2(x_1, x_2, ..., x_n)$

тоді і тільки тоді, коли $A_1(x_1, x_2, ..., x_n) \Leftrightarrow A_2(x_1, x_2, ..., x_n)$, *де* $A_1(x_1, x_2, ..., x_n)$, $A_2(x_1, x_2, ..., x_n)$, *— позначення n-місних предикатів, заданих на одних і тих самих базисних множинах* $X_1, X_2, ..., X_n$.

7. Якщо ми під предикатами розуміємо так звану висловлювальну форму, тобто вираз, який містить предметні змінні і перетворюється у висловлення при заміні цих змінних елементами відповідних базисних множин, то цей же предикат задає, говорять, так звану **пропозиційну** чи, говорять, **логічну функцію**, значеннями якої можуть бути істинносні значення T або ж F, при заміні в предикаті предметних змінних елементами базисних множин предиката (згадаймо для кращого розуміння таку аналогію з шкільної алгебри: числовий вираз, наприклад, $f(x) = 3x^2 - 2$, де $x \in \mathbb{R}$ — предметна змінна, задає числову функцію, значеннями якої є дійсні числа, які отримуються при заміні предметної змінної x елементами множини $\mathbb{R}$ дійсних чисел у виразі $f(x)$).

Означення 4.1.4. *Пропозиційною або, говорять, логічною чи предикатною функцією, яка відповідає предикату* $A(x_1, x_2, ..., x_n)$ *і позначається* f_A, *називається така функція, яка має ту ж саму область визначення, що і відповідний їй предикат, а її значеннями є істинносні значення* T *або ж* F, *які може приймати відповідне висловлення, що отримується при заміні в предикаті предметних змінних* $x_1, x_2, ..., x_n$ *елементами* $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ *базисних множин* $X_1, X_2, ..., X_n$ *предиката, тобто* $f_A(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) \overset{df}{=} p(A(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n))$.

Теорему 4.1.1 за означенням предикатної функції можна подати у вигляді наступної теореми.

Теорема 4.1.3. *Для того, щоб предикати* $A_1(x_1, x_2, ..., x_n)$ *і* $A_2(x_1, x_2, ..., x_n)$ *були рівносильними між собою, необхідно і достатньо, щоб відповідні їм логічні, тобто предикатні функції співпадали, тобто символічно це матиме такий вигляд:* $A_1(x_1, x_2, ..., x_n) \equiv A_2(x_1, x_2, ..., x_n)$ *тоді і тільки тоді, коли* $f_{A_1} = f_{A_2}$; *іншими словами це означає, що рівносильні предикати задаються однією і тією ж предикатною функцією.*

8. Зауваження. Двоелементну множину $B = \{T, F\}$ іноді називають **бульовою множиною**, і функцію, аргументи якої і вона сама приймають значення з бульової множини B, теж називають **бульовою функцією**. В алгебрі висловлень, вводячи основні операції диз'юнкція $\vee$, кон'юнкція $\wedge$, імплікація $\to$, еквіваленція $\leftrightarrow$, заперечення $\overline{a}$, ми по суті вводили відповідні бульові функції $\beta_\vee$, $\beta_\wedge$, $\beta_\to$, $\beta_\leftrightarrow$, β_-, які можна задати відповідними виразами, а саме: $\beta_\vee(a,b) \overset{df}{=} a \vee b$, $\beta_\wedge(a,b) \overset{df}{=} a \wedge b$, $\beta_\to(a,b) \overset{df}{=} a \to b$, $\beta_\leftrightarrow(a,b) \overset{df}{=} a \leftrightarrow b$, $\beta_-(a) \overset{df}{=} \overline{a}$, і скласти для них відповідні таблиці істинності. Ці функції іноді називають **основними бульовими функціями**, оскільки, як відомо, довільну бульову функцію можна виразити через основні і, отже, записати у вигляді логічної формули з алгебри висловлень. Введені нами вище пропозиційні, тобто предикатні функції є узагальненнями бульових, оскільки їх аргументами є предметні змінні, значеннями яких можуть бути елементи множин довільної природи, в той час, як аргументами бульових функцій є лише бульові змінні.

4.2 Типи предикатів; область істинності предиката та її зв'язок з типом предиката, з рівносильністю, з відношенням

1. Нехай $A(x_1, x_2, ..., x_n)$ — n-місний предикат з базисними множинами $X_1, X_2, ..., X_n$. З цим предикатом зв'язуються такі підмножини декартового добутку $X \overset{df}{=} X_1 \times X_2 \times ... \times X_n$ його базисних множин, як **область визначення** $D_A \subset X$ і **область істинності** $I_A \subset X$ предиката A.

Означення 4.2.1. *Областю визначення (або, говорять, існування) предиката $A(x_1, x_2, ..., x_n)$ називається така підмножина $D_A \subset X$ декартового добутку $X \overset{df}{=} X_1 \times X_2 \times ... \times X_n$ базисних множин цього предиката, що заміна n-ки $(x_1, x_2, ..., x_n)$ предметних змінних на довільну n-ку значень $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ з цієї множини D_A перетворює предикат у висловлення, що символічно записується так:*

$D(A)$ — область визначення предиката $A(x_1, x_2, ..., x_n)$ $\overset{df}{\Longleftrightarrow}$

$D_A \overset{df}{=} \{(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) \mid A(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ — *висловлення*$\}$.

Означення 4.2.2. *Областю істинності предиката* $A(x_1, x_2, ..., x_n)$ *називається така підмножина* $I_A \subset D_A$ *його області визначення* D_A, *на якій він при відповідній заміні предметних змінних на* n*-ки елементів з* I_A *перетворюється в істинне висловлення, що символічно матиме такий вигляд:* $I_A \subset X$ — *область істинності предиката* $A(x_1, x_2, ..., x_n) \overset{df}{\Longleftrightarrow}$ $I_A \overset{df}{=} \{(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) \in D_A \mid p(A(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)) = T\} \subset D_A$.

2. Розглянемо такі **приклади**. Знайти області визначення та істинності для предикатів:

а) $A(x, y) = \dfrac{x^2 + y^2 - 1}{(x^2 - 9)^2 + (y^2 - 4)^2} = 0$;

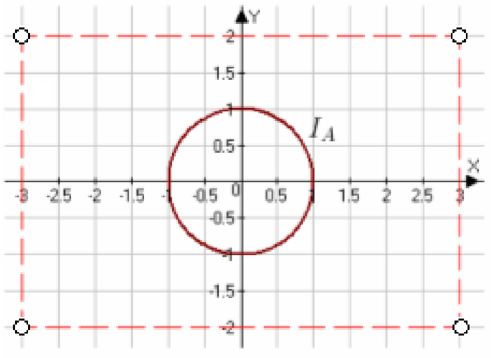
б) $B(x, y) = \dfrac{\sqrt{x - 2}}{x - y} > 0$, де $x, y \in \mathbb{R}$, та зобразити їх на координатній площині xOy.

Розв'язання. Оскільки дані предикати двомісні і однорідні, з спільною базисною множиною $\mathbb{R}$, то отримаємо такі результати:

а) $D_A = \{(x; y) | (x^2 - 9)^2 + (y^2 - 4)^2 \neq 0\} = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \setminus$ $\setminus \{(3; 2), (-3; 2), (-3; 2), (3; -2)\}$ — це вся координатна площина без чотирьох точок з вказаними координатами (див. малюнок 1.10); $I_A = \{(x; y) \mid \dfrac{x^2 + y^2 - 1}{(x^2 - 9)^2 + (y^2 - 4)^2} = 0\} = \{(x; y) \mid x^2 + y^2 = 1\}$ — це з геометричної точки зору коло радіуса $r = 1$, центр якого співпадає з початком координат (див. малюнок 1.10).

б) $D_B = \{(x; y) | \dfrac{\sqrt{x - 2}}{x - y}$ існує$\} = \{(x; y) | x - 2 \geqslant 0 \wedge x - y \neq$ $\neq 0\} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ — це права півплощина, утворена прямою $x = 2$, без променя, який міститься на прямій $y = x$ (див. малюнок 1.11); $I_B = \{(x; y) | \dfrac{\sqrt{x - 2}}{x - y} > 0\} = \{(x; y) | x - 2 > 0 \wedge y < x\} \subset D_B$ — це та нижня частина правої півплощини, утвореної прямою $x = 2$, без променів, що містяться на прямих $x = 2$, $y = x$, яка міститься між прямими $y = x$, $x = 2$ (див. малюнок 1.11).

3. При розгляді предикатів відносно набуття ними істинносних значень T або F множину всіх предикатів можна розбити на такі



Мал. 1.10.

три класи.

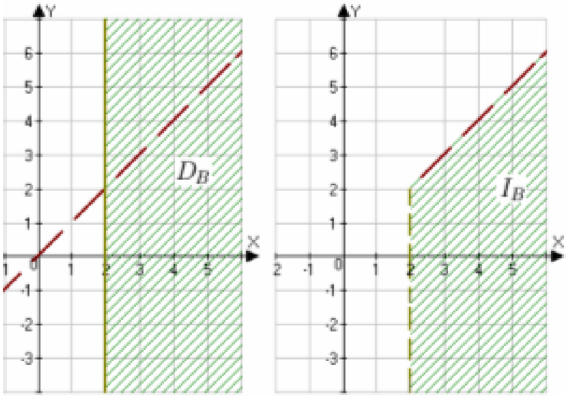
1. **Тотожно істинні предикати** — це такі предикати $A(x_1, x_2, ..., x_n)$, логічні значення яких є T при будь-якій заміні n-ки предметних змінних на n-ку елементів $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ з області визначення D_A, тобто $p(A(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)) = T$.

2. **Тотожно хибні предикати** — це такі предикати $A(x_1, x_2, ..., x_n)$, логічні значення яких є F при будь-якій заміні n-ки предметних змінних на n-ку $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ з області визначення D_A, тобто $p(A(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)) = F$.

3. **Нейтральні предикати** — це такі предикати $A(x_1, x_2, ..., x_n)$, логічними значеннями яких можуть бути як T, так і F при відповідних замінах предметних змінних.

Крім вказаних вище трьох видів предикатів, часто виділяють так звані **виконувані предикати** — це такі предикати $A(x_1, x_2, ..., x_n)$, для яких знайдеться хоча б одна така n-ка $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ елементів з області визначення D_A, що предикат $A(x_1, x_2, ..., x_n)$ перетвориться в істинне висловлення, тобто $p(A(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)) = T$.

Очевидно, що множина всіх виконуваних предикатів складається з тотожно істинних та нейтральних предикатів, тобто довільний тотожно істинний або нейтральний предикат є виконуваним предикатом.



Мал. 1.11.

4. Характеристичні властивості введених вище типів предикатів на мові їх областей визначення та істинності та на мові логічної еквівалентності можна виразити таким чином.

1. Предикат $A(x_1, x_2, ..., x_n)$ — тотожно істинний $\Leftrightarrow I_A = D_A$;

2. Предикат $A(x_1, x_2, ..., x_n)$ — тотожно хибний $\Leftrightarrow I_A = \varnothing$;

3. Предикат $A(x_1, x_2, ..., x_n)$ — нейтральний $\Leftrightarrow I_A \neq \varnothing$ і $I_A \neq D_A$;

4. Предикат $A(x_1, x_2, ..., x_n)$ — виконуваний $\Leftrightarrow I_A \neq \varnothing$.

5. Розглянемо **ілюструючі приклади** типів предикатів.

1. $\sin^2 x + \cos^2 x = 2$, де $x \in \mathbb{R}$, — одномісний тотожно хибний предикат; $I = \varnothing$.

2. $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, де $x \in \mathbb{R}$, — одномісний тотожно істинний предикат; це виконуваний предикат; $I = \mathbb{R}$.

3. $2n + 3k = 1$, де $n, k \in \mathbb{Z}$, — двомісний нейтральний предикат; наприклад, $(-1; 1) \in I$, $(1; 1) \notin I$.

4. $x^4 + y^4 + 4 \leqslant 0$, де $x, y \in \mathbb{R}$ — двомісний тотожно хибний предикат; $I = \varnothing$.

5. $x^2 + 5x + 6 = 0$, де $x \in \mathbb{N}$ — одномісний тотожно хибний предикат; $I = \varnothing$.

6. $x^2 + 5x + 6 = 0$, де $x \in \mathbb{Z}$ — одномісний нейтральний предикат; це виконуваний предикат; $I = \{-2; -3\}$.

6. Легко бачити, що між рівносильністю предикатів та їх областями визначення та істинності встановлюється тісний взаємозв'язок у вигляді такої логічної еквівалентності: $(A_1(x_1, x_2, ..., x_n) \equiv A_2(x_1, x_2, ..., x_n)) \Leftrightarrow (D_{A_1} = D_{A_2}$ і $I_{A_1} = I_{A_2})$, де $A_1(x_1, x_2, ..., x_n), A_2(x_1, x_2, ..., x_n)$ — n-місні предикати з базисними множинами $X_1, X_2, ..., X_n$.

Зв'язок між логічним слідуванням вказаних вище предикатів та їх областями визначення та істинності має такий вигляд: $(A_1(x_1, x_2, ..., x_n) \Rightarrow A_2(x_1, x_2, ..., x_n))$ тоді і тільки тоді, коли $(D_{A_1} \subset D_{A_2} \wedge I_{A_1} \subset I_{A_2})$.

7. При введенні поняття предиката було відмічено, що предикати виражають певні властивості об'єктів, якщо ці предикати одномісні, або виражають зв'язки, відношення між об'єктами, якщо предикати багатомісні. Оскільки раніше поняття відношення нами було введено як підмножина декартового добутку певних базисних множин, то отримуємо наступний **взаємозв'язок між предикатами та відношеннями**.

Нехай $A(x_1, x_2, ..., x_n)$ — n-місний предикат з базисними множинами $X_1, X_2, ..., X_n$, а підмножини $D_A, I_A \subset X = X_1 \times X_2 \times \times ... \times X_n$ — це відповідно область визначення і область істинності цього предиката, причому, як ми знаємо, має місце включення $I_A \subset D_A \subset X$. Тоді всі рівносильні з $A(x_1, x_2, ..., x_n)$ предикати задають одну і ту ж саму область істинності I_A, яка є n-арним відношенням між елементами множин $X_1, X_2, ..., X_n$, і навпаки, якщо $\varphi \subset X = X_1 \times X_2 \times ... \times X_n$ — деяке n-арне відношення між елементами множин $X_1, X_2, ..., X_n$, то воно є спільною областю істинності цілого класу всіх рівносильних між собою n-місних предикатів з базисними множинами $X_1, X_2, ..., X_n$.

Наприклад, для двомісного предиката $m + n \leqslant 1$, заданого на множинах $X_1 = X_2 = X = \{0, 1, 2, 3, 4\}$, очевидно маємо таку область істинності: $I_{m+n \leqslant 1} = \{(0; 0), (0; 1), (1; 0)\}$, яка задає бінарне відношення $\varphi \subset X \times X$ між елементами множини X; очевидно, що які б ми не брали рівносильні предикати, для них область істинності не змінилася б; так в ланцюжку $m + n \leqslant 1 \equiv m \leqslant 1 - n \equiv 3m + 3n \leqslant \leqslant 3 \equiv ... \equiv 2m + 4 \leqslant 6 - 2n$ рівносильних предикатів кожен з цих предикатів матиме одну і ту ж саму область істинності $I_{m+n \leqslant 1}$, що визначає бінарне відношення $\varphi = \{(0; 0), (0; 1), (1; 0)\} \subset X \times X$ між елементами множини X, яке співпадає з областю істинності $I_{m+n\leqslant 1}$ заданого предиката $m+n \leqslant 1$ на множині $X = \{0,1,2,3,4\}$.

4.3 Найпростіші операції над предикатами та зв'язок цих операцій з операціями над відповідними областями істинності цих предикатів

1. Виходячи з означень предиката та основних операцій над висловленнями, можна ввести аналогічні основні операції і над предикатами. Ці операції над предикатами назвемо **найпростішими** і назвемо їх такими ж самими іменами, які були вжиті для відповідних операцій над висловленнями.

Нехай $A(x_1,x_2,...,x_n)$, $B(x_1,x_2,...,x_n)$ — n-місні предикати з предметними змінними $x_1 \in X_1$, $x_2 \in X_2$, ..., $x_n \in X_n$ базових множин $X_1, X_2, ..., X_n$, $\varnothing \neq D = D_A = D_B \subset X = X_1 \times X_2 \times ... \times X_n$ — непорожня спільна область визначення цих предикатів, а $I_A, I_B \subset D$ — відповідні цим предикатам області істинності.

Означення 4.3.1. *Кон'юнкцією предикатів* $A(x_1,x_2,...,x_n)$ *і* $B(x_1,x_2,...,x_n)$ *називається такий* n*-місний предикат* $A(x_1,x_2,...,x_n) \wedge B(x_1,x_2,...,x_n)$ *з тими ж самими предметними змінними, тими ж самими базисними множинами і тією ж самою областю визначення, що і в предикатів* A *та* B*, який перетворюється в істинне висловлення при тих і тільки тих значеннях* $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ *відповідних предметних змінних* $x_1, x_2, ..., x_n$ *з області визначення* D*, при яких обидва предикати* A *і* B *перетворюються одночасно в істинні висловлення.*

Означення 4.3.2. *Диз'юнкцією предикатів* $A(x_1,x_2,...,x_n)$ *і* $B(x_1,x_2,...,x_n)$ *називається такий* n*-місний предикат* $A(x_1,x_2,...,x_n) \vee B(x_1,x_2,...,x_n)$ *з тими ж самими предметними змінними, тими ж самими базисними множинами і тією ж самою областю визначення, що і в предикатів* A *та* B*, який перетворюється в істинне висловлення при тих і тільки тих значеннях* $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ *відповідних предметних змінних* $x_1, x_2, ..., x_n$ *з області визначення* D*, при яких хоча би один з предикатів* A, B *перетворюється в істинне висловлення.*

Означення 4.3.3. *Імплікацією предикатів* $A(x_1, x_2, ..., x_n)$ *і* $B(x_1, x_2, ..., x_n)$ *називається такий n-місний предикат* $A(x_1, x_2, ..., x_n) \to B(x_1, x_2, ..., x_n)$ *з тими ж самими предметними змінними, тими ж самими базисними множинами і тією ж самою областю визначення, що і в предикатів A та B, який перетворюється в хибне висловлення при тих і тільки тих значеннях* $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ *відповідних предметних змінних* $x_1, x_2, ..., x_n$ *з області визначення D, при яких одночасно предикат A перетворюється в істинне, а предикат B — в хибне висловлення.*

Означення 4.3.4. *Еквіваленцією предикатів* $A(x_1, x_2, ..., x_n)$ *і* $B(x_1, x_2, ..., x_n)$ *називається такий n-місний предикат* $A(x_1, x_2, ..., x_n) \leftrightarrow B(x_1, x_2, ..., x_n)$ *з тими ж самими предметними змінними, тими ж самими базисними множинами і тією ж самою областю визначення, що і в предикатів A та B, який перетворюється в істинне висловлення при тих і тільки тих значеннях* $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ *відповідних предметних змінних* $x_1, x_2, ..., x_n$ *з області визначення D, при яких обидва предикати A і B перетворюються одночасно в істинні висловлення, або ж в хибні висловлення.*

Означення 4.3.5. *Запереченням предиката* $A(x_1, x_2, ..., x_n)$ *називається такий n-місний предикат* $A(x_1, x_2, ..., x_n)$ *з тими ж самими предметними змінними, тими ж самими базисними множинами і тією ж самою областю визначення, що і в предиката A, який перетворюється в істинне висловлення при тих і тільки тих значеннях* $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ *відповідних предметних змінних* $x_1, x_2, ..., x_n$ *з області визначення D, при яких предикат A перетворюється в хибне висловлення, і навпаки.*

На мові істинностних значень введені вище означення найпростіших логічних операцій над предикатами можна подати у такому вигляді: якщо $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) \in D$, то мають місце наступні рівності:

$$p(A(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) \wedge B(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)) = \\ = p(A(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)) \wedge p(B(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n));$$

$$p(A(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) \vee B(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)) = \\ = p(A(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)) \vee p(B(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n));$$

$$p(A(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n)\to B(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n))=$$
$$=p(A(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n))\to p(B(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n));$$

$$p(A(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n)\leftrightarrow B(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n))=$$
$$=p(A(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n))\leftrightarrow p(B(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n));$$

$$p(\overline{A(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n)})=\overline{p(A(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n))}.$$

2. З наведених вище означень найпростіших логічних операцій над предикатами та відповідних цим означенням наведених рівностей з істинностними значеннями результатів цих операцій отримуємо такий висновок: **всі властивості, які мали місце для основних операцій над висловленнями, зберігаються і для введених аналогічних найпростіших операцій над предикатами.**

Наприклад, мають місце закони де Моргана:

$$\overline{A(x_1,x_2,...,x_n)\wedge B(x_1,x_2,...,x_n)}\equiv\overline{A(x_1,x_2,...,x_n)}\vee\overline{B(x_1,x_2,...,x_n)};$$

$$\overline{A(x_1,x_2,...,x_n)\vee B(x_1,x_2,...,x_n)}\equiv\overline{A(x_1,x_2,...,x_n)}\wedge\overline{B(x_1,x_2,...,x_n)}.$$

3. Між введеними операціями кон'юнкції, диз'юнкції та заперечення над предикатами та теоретико-множинними операціями відповідно перетину, об'єднання та доповнення над областями істинності цих предикатів існує тісний взаємозв'язок. Має місце така теорема:

Теорема 4.3.1. *Області істинності кон'юнкції, диз'юнкції та заперечення предикатів відповідно рівні перетину, об'єднанню та доповненню (до області визначення) областей істинності кожного із предикатів, тобто мають місце рівності* $I_{A\wedge B}=I_A\cap I_B$; $I_{A\vee B}=I_A\cup I_B$; $I_{\overline{A}}=\overline{I_A}=D\setminus I_A$, *де* D *— область визначення* n*-місних предикатів* $A(x_1,x_2,...,x_n)$, $B(x_1,x_2,...,x_n)$.

Доведення даної теореми випливає з відповідних означень операцій над предикатами, відповідних операцій над висловленнями та відповідних теоретико-множинних операцій.

Дана теорема ще раз підкреслює те, що між відповідними операціями над висловленнями, над предикатами та над множинами існує тісний взаємозв'язок, який полягає в тому, що відповідні операції володіють аналогічними властивостями.

4. Вище нами введено **найпростіші бінарні операції** — кон'юнкція, диз'юнкція, імплікація та еквіваленція, — над такими предикатами, які мають спільну область визначення. Якщо ж предикати мають однакову місткість, відповідно однакові предметні змінні, однакові базисні множини, але різні області визначення, то для можливості введення таких операцій в даному випадку зводять розглядувані предикати до спільної області визначення, яка є перетином областей визначення розглядуваних двох предикатів бінарної операції.

5. Приклад. Задано два одномісні предикати $A(x) =$„$\dfrac{\sqrt{x+5}}{x^2-9} < 0$“, $B(x) =$„$\log_2 x \leqslant 3$“ з базисною множиною $\mathbb{R}$ дійсних чисел. Легко бачити, що їх області визначення D_A, D_B та області істинності I_A, I_B такі:

$D_A = [-5; -3) \cup (-3; 3) \cup (3; +\infty)$; $I_A = (-3; 3)$;

$D_B = (0; +\infty)$; $I_B = (0; 8]$.

Для розгляду диз'юнкції, наприклад, цих двох предикатів $C(x) = A(x) \vee B(x) =$„$\dfrac{\sqrt{x+5}}{x^2-9} < 0 \vee \log_2 x \leqslant 3$“ знаходимо відповідну область визначення цієї диз'юнкції $D_C = (0, 3) \cup (3, +\infty)$, яка очевидно є перетином областей визначення D_A і D_B даних предикатів: $D_C = D_A \cap D_B$. Тоді область істинності I_C цієї диз'юнкції буде така множина $I_C = (0; 3) \cup (3; 8]$. Аналізуючи отриману відповідь, бачимо, що ніяк не може виконуватися, **здавалося б, що вірна !!! відповідь** $I_C = I_A \cup I_B = (-3, 3) \cup (0, 8]$ — зверніть на це увагу.

6. Ще раз підкреслимо, що нами було вище введено найпростіші бінарні операції кон'юнкція, диз'юнкція, імплікація та еквіваленція над такими предикатами, які мають однакову місткість, одні і ті ж предметні змінні, одні і ті ж базисні множини і однакові області визначення. А якщо ж області визначення у них різні, то ці предикати, як було сказано вище, розглядаємо на спільній області визначення, яка є перетином областей визначення розглядуваних предикатів для бінарної операції.

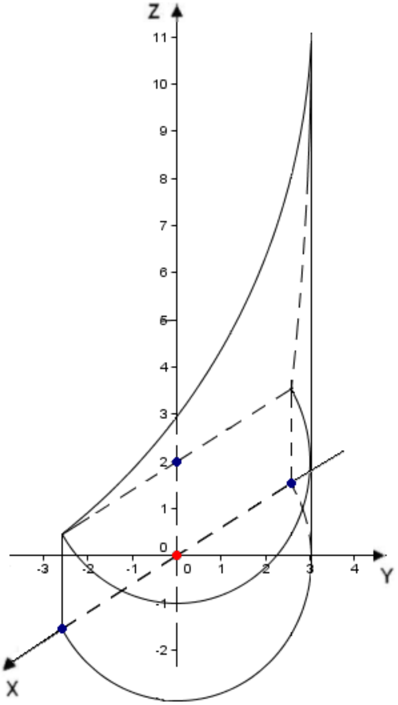
Виникає питання, а як же вводити ці найпростіші операції для таких предикатів, які мають різну місність, або деякі предметні змінні в них не одні і ті ж самі, або ж відповідні базисні множини не всі однакові. Виявляється, що і в таких випадках теж можна вводити вказані вище найпростіші бінарні операції. Здійснюється це таким шляхом.

Нехай маємо два предикати різної місності, у яких предметні змінні не всі відповідно однакові, відповідно однакові змінні можуть мати різні базисні множини, і, в зв'язку з цим, області існування можуть бути різними. Тоді обидва предикати перетворюємо у такі, що мають однакову місність, однакові відповідно предметні змінні, однакові відповідно базисні множини і, нарешті, рівні області існування, тобто області визначення. В результаті місність обох предикатів буде рівною сумі всіх різних предметних змінних, які зустрічаються в обох предикатах. При цьому для кожної спільної предметної змінної в ролі базисної множини береться перетин відповідних цій змінній базисних множин даних предикатів. Тоді отримаємо предикати однакової місності, з однаковими відповідно предметними змінними та відповідно однаковими базисними множинами. **Зауважимо**, що перетворення заданого предиката в такий, в якому повинна бути нова предметна змінна, наприклад, x_k, можна здійснити хоча би заміною цього предиката на кон'юнкцію його з рівністю $x_k = x_k$, яка явно вказуватиме на присутність цієї змінної в розглядуваному предикаті. Пояснимо наведені міркування на такому **ілюстративному прикладі**. Нехай маємо предикати $A(x_1, x_2, x_3)$, де $x_1 \in X_1, x_2 \in X_2, x_3 \in X_3^A$ і $B(x_1, y_1, x_3, x_4)$, де $x_1 \in X_1, y_1 \in Y_1, x_3 \in X_3^B, x_4 \in X_4$. Перетворимо дані предикати у такі: $A_1(x_1, x_2, x_3, x_4, y_1) = A(x_1, x_2, x_3) \wedge x_4 = x_4 \wedge y_1 = y_1$, де $x_1 \in X_1$, $x_2 \in X_2$, $x_3 \in X_3 = X_3^A \cap X_3^B$, $x_4 \in X_4$, $y_1 \in Y_1$;
$B_1(x_1, x_2, x_3, x_4, y_1) = B(y_1, x_3, x_4) \wedge x_1 = x_1 \wedge x_2 = x_2$, де $x_1 \in X_1$, $x_2 \in X_2$, $x_3 \in X_3 = X_3^A \cap X_3^B$, $x_4 \in X_4$, $y_1 \in Y_1$; при цьому нехай D_{A_1}, D_{B_1} — відповідні їм області визначення. Якщо $D = D_{A_1} \cap D_{B_1} \neq$ $\neq \varnothing$, то, прийнявши множину D за область визначення отриманих предикатів, можна ввести для них одну з найпростіших бінарних операцій — кон'юнкцію, диз'юнкцію, імплікацію або ж еквіваленцію.

7. Задача. Вказати графічно область істинності, яку задає кон'-

юнкція предикатів $A(x, y) =$„$0 \leqslant y \leqslant \sqrt{9 - x^2}$“ та $B(x, y) =$„$0 \leqslant \leqslant z \leqslant y^2 + 2$“, де $x, y, z \in \mathbb{R}$.

Розв'язання. В даній задачі всі три змінні x, y, z розглядаються в обох предикатах на одній і тій же базовій множині $\mathbb{R}$ дійсних чисел: $x, y, z \in \mathbb{R}$.



Мал. 1.12.

Подамо ці предикати у вигляді $A_1(x, y, z) =$„$0 \leqslant y \leqslant \sqrt{9 - x^2} \wedge \wedge z = z$“, $B_1(x, y, z) =$„$0 \leqslant z \leqslant y^2 + 2 \wedge x = x$“ і вкажемо їх області визначення: $D_{A_1} = \{(x, y, z) | |x| \leqslant 3\}$; $D_{B_1} = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Тому очевидно, що область визначення $D_{A_1 \wedge B_1}$ кон'юнкції цих предикатів є такою: $D_{A_1 \wedge B_1} = D_{A_1} \cap D_{B_1} = \{(x, y, z) | |x| \leqslant 3\}$.

Область істинності $I_{A_1 \wedge B_1}$ цих предикатів з геометричної точки зору можна собі уявити, виходячи з їх задання, у вигляді частини трьохвимірного координатного простору $Oxyz$, обмеженої двома координатними площинами, що задаються рівняннями: $z = 0$, $y = 0$, і двома поверхнями, що задаються рівняннями: $y = \sqrt{9 - x^2}$, $z = y^2 + 2$. Аналітично ця область істинності $I_{A_1 \wedge B_1}$, по суті, задається системою нерівностей

$$\begin{cases} 0 \leqslant y \leqslant \sqrt{9 - x^2}; \\ 0 \leqslant z \leqslant y^2 + 2, \end{cases}$$

де $x, y, z \in R$. Відповідний малюнок для графічного зображення цієї області істинності $I_{A_1 \wedge B_1}$ матиме вигляд, що нагадує частину кругового циліндричного тіла, див (мал. 1.12).

4.4 Конкретизація предметних змінних та їх зв'язування кванторами в предикатах; універсальний та екзистенціональний квантори

1. Розглянуті в попередньому пункті найпростіші операції над предикатами, які аналогічні до відповідних операцій над висловленнями, перетворюють предикати у предикати. Але предикати, як ми знаємо, в порівнянні з висловленнями мають більш тонку будову, оскільки можуть містити предметні змінні. Тому для предикатів вводять нові операції, які пов'язані із зв'язуванням цих предметних змінних, із зменшенням їх кількості. Завдяки цьому логіка предикатів в порівнянні з алгеброю висловлень стає набагато змістовнішою. Вона дає можливість набагато глибше проводити ті чи інші складні міркування та отримувати на їх основі потрібні умовиводи.

2. Однією з найпростіших операцій над предикатом, яка дає можливість зменшувати кількість його предметних змінних, є **конкретизація предметної змінної предиката**.

Означення 4.4.1. *Конкретизацією предметної змінної n-місного предиката $A(x_1, x_2, ..., x_3)$ називається така операція над ним, яка перетворює цей предикат в $(n-1)$-місний предикат за рахунок того, що одна із його предметних змінних x_k, де $1 \leqslant k \leqslant n$, замінюється конкретним значенням α_k із відповідної області допустимих значень відповідної базисної* *множини* X_k*, тобто отримується такий* $(n-1)$*-місний предикат* $A(x_1,...,x_{k-1},\alpha_k,x_{k+1},...,x_k)$*, який має* $(n-1)$ *предметних змінних.*

Наприклад: $x-2y\leqslant 0$, де $x,y\in\mathbb{R}$ — двомісний предикат з двома дійсними змінними x,y; нехай $y=3$, тобто конкретизували змінну y; тоді маємо $x-2\cdot 3\leqslant 0$ — це одномісний предикат з дійсною змінною x.

Якщо крок за кроком здійснити для предиката поступову конкретизацію всіх його предметних змінних, то в кінці кінців отримаємо 0-**місний (нуль-місний) предикат, тобто висловлення**.

3. Особливо важлива роль належить таким операціям над предикатами, що дають можливість зв'язувати предметні змінні, зменшувати їх кількість, які називаються **квантифікаціями**, або, говорять, **навішуваннями кванторів на предикат** (згадайте відоме слово квант, що означає частинку, порцію). Розрізняють при цьому операцію навішування на предикат **універсального квантора** (говорять ще — **квантора всезагальності**) і операцію навішування на предикат екзистенціонального квантора (говорять ще — **квантора існування**).

4. Нехай $A(x)$ — одномісний предикат, де $x\in X$ — предметна змінна, а D_A — область визначення цього предиката.

Означення 4.4.2. *Навішуванням універсального квантора на предикат* $A(x)$ *називається така операція, яка перетворює цей предикат в універсальне висловлення „для будь-якого* $x\in D_A\subset X$ *виконується* $A(x)$*“, яке позначається у вигляді* $(\forall x\in D_A\subset X)A(x)$ *і вважається істинним тоді і тільки тоді, коли цей предикат тотожно істинний.*

Символ $(\forall x)$ називається **квантором всезагальності по змінній** x або **універсальним квантором**; те, що $x\in D_A\subset X$, часто не записують, якщо зрозуміло про яку область визначення $D_A\subset X$ ведеться мова для даного предиката.

Знак „$\forall$“ взято від перевернутої літери — першої букви слова „All“ чи „Alle“, що перекладається як „Всі“.

Наприклад, для предиката $n>5$, де $n\in\mathbb{N}$, навішування універсального квантора дає висловлення $(\forall n\in N)(n>5)$ — „всі натуральні числа більші за 5“, яке очевидно хибне.

5.

Означення 4.4.3. *Навішуванням екзистенціонального квантора на предикат $A(x)$ називається така операція, яка перетворює цей предикат в екзистенціональне висловлення „існує таке $x \in D_A \subset X$, що виконується $A(x)$“, яке позначається у вигляді $(\exists x \in D_A \subset X)A(x)$ і вважається істинним тоді і тільки тоді, коли цей предикат виконуваний.*

Символ $\exists$ називається **квантором існування по змінній** x **або екзистенціональним квантором**. Знак $\exists$ взято від перевернутої літери E — першої букви слова „Exist“ чи „Existieren“, що перекладається як „існувати“.

Наприклад, для предиката $n > 5$, де $n \in \mathbb{N}$, навішування квантора існування дає висловлення $(\exists n \in \mathbb{N})(n > 5)$ — „існує таке натуральне число $n \in \mathbb{N}$, яке більше за 5“, яке очевидно істинне.

6. Якщо область визначення $D_A \subset X$ предиката $A(x)$, де $x \in X$, скінченна, тобто нехай $D_A = \{\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m\}$, то, в силу означень кон'юнкції та диз'юнкції висловлень, легко бачити, що універсальне висловлення $(\forall \in D_A)A(x)$ рівносильне кон'юнкції висловлень, а екзистенціональне висловлення $(\exists x \in D_A)A(x)$ рівносильне диз'юнкції цих m висловлень, тобто:

$$(\forall \in D_A)A(x) \equiv A(\alpha_1) \wedge A(\alpha_2) \wedge ... \wedge A(\alpha_m);$$

$$(\exists \in D_A)A(x) \equiv A(\alpha_1) \vee A(\alpha_2) \vee ... \vee A(\alpha_m).$$

Згадаймо, що в математиці маємо справу з аналогічною ситуацією, коли розглядають, наприклад, суму $\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_m$ m доданків, яку записують виразом $\sum\limits_{i=1}^{m} \alpha_i$, тобто має місце рівність $\sum\limits_{i=1}^{m} \alpha_i = \alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_m$.

Таким чином, про операції навішування на одномісний предикат одного із кванторів можна зробити такий **висновок**: якщо одномісний предикат визначений на скінченній множині, то навішування квантора загальності на предикат є поширенням операції кон'юнкції на скінченну кількість висловлень, а навішування квантора існування є поширенням операції диз'юнкції на скінченну кількість висловлень. Тому, мабуть, не випадково в деяких посібниках з логіки універсальний квантор $(\forall x)$ позначають як велику кон'юнкцію $\bigwedge_x$, а екзистенціональний квантор — як велику диз'юнкцію $\bigvee_x$.

Разом з тим відмітимо, що коли предикат визначений на нескінченній множині, то операції навішування універсального чи екзистенціонального кванторів на предикат є суттєво новими операціями в порівнянні з кон'юнкцією чи диз'юнкцією висловлень (до речі, аналогічна ситуація зустрічається і в математиці, коли розглядається сума, наприклад, $1 + 1/3 + 1/9 + 1/27 + ... = 1.5$).

Зауважимо, що іноді операції навішування універсального і екзистенціонального кванторів на предикат називають взаємно двоїстими по аналогії з операціями кон'юнкції і диз'юнкції.

7. Бачимо, що операція навішування одного із кванторів на одномісний предикат $A(x)$, де $x \in D_A \subset X$, перетворює його в нульмісний предикат, тобто у висловлення. В результаті в отриманих висловленнях виду $(\forall x \in D_A)A(x)$, $(\exists x \in D_A)A(x)$ буква x уже не є предметною змінною, оскільки замість x в ці вирази для висловлень здійснювати підстановку тих чи інших конкретних значень з області існування $D_A \subset X$ предиката $A(x)$ не має сенсу, бо отримані висловлення уже не залежать від предметної змінної x. Говорять, що в отриманих формулах $(\forall x \in D_A)A(x)$, $(\exists x \in D_A)A(x)$ квантори зв'язали змінну x. Про змінну $x \in D_A$ тоді говорять також, що це **зв'язана квантором змінна**. Вона, говорять, перестає бути вільною і замінювати її на конкретне значення не маємо права. Хоч x і присутня в цих висловленнях, але вона лише вказує на предикат, з якого утворюється висловлення. Згадаймо, що і в шкільній математиці зустрічалися зв'язані змінні. Наприклад, у виразах $\sum\limits_{n=1}^{7}(2n-1)$, $\int_2^7 (x^2 - x + 3)dx$ вжиті букви n, x не є вільними; вони, говорять, зв'язані і замість них підставляти конкретні значення $n_0 \in N$ чи $x_0 \in [2; 7]$ не має змісту.

8. Перейдемо тепер до **квантифікації**, тобто **навішування кванторів, багатомісних предикатів**, що дає можливість значно збагатити застосування таких операцій.

Нехай $A(x_1, x_2, ..., x_n)$ — n-місний предикат з предметними змінними $x_1 \in X_1, x_2 \in X_2, ..., x_n \in X_n$, базисними множинами $X_1, X_2, ..., X_n$ і областю визначення $D_A \subset X = X_1 \times X_2 \times ... \times X_n$.

Означення 4.4.4. *Навішуванням універсального квантора на предикат $A(x_1, x_2, ..., x_n)$ по змінній x_k, де $1 \leqslant k \leqslant n$, називається такий $(n-1)$-місний предикат „для будь-якого x_k виконується $A(x_1, x_2, ..., x_n)$“, який позначається $(\forall x_k)A(x_1, x_2, ..., x_n)$ і вважається істинним для тих і тільки тих значень $\alpha_1 \in X_1$, $\alpha_2 \in X_2, ..., \alpha_{k-1} \in X_{k-1}, \alpha_{k+1} \in X_{k+1}, ..., \alpha_n \in X_n$, при яких висловлення $(\forall x_k)A(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_{k-1}, x_k, \alpha_{k+1}, ..., \alpha_n)$ істинне.*

Означення 4.4.5. *Навішуванням екзистенціонального квантора на предикат $A(x_1, x_2, ..., x_n)$ по змінній x_k, де $1 \leq k \leq n$, називається такий $(n-1)$-місний предикат „існує таке x_k, що виконується $A(x_1, x_2, ..., x_n)$“, який позначається $(\exists x_k)A(x_1, x_2, ..., x_n)$ і вважається істинним для тих і тільки тих значень $\alpha_1 \in X_1, \alpha_2 \in X_2, ..., \alpha_{k-1} \in X_{k-1}, \alpha_{k+1} \in X_{k+1}, ..., \alpha_n \in X_n$, при яких висловлення $(\exists x_k)A(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_{k-1}, x_k, \alpha_{k+1}, ..., \alpha_n)$ істинне.*

9. Отримані з n-місного предиката $A(x_1, x_2, ..., x_n)$ $(n-1)$-місні предикати містять $(n-1)$ вільних змінних $x_1, x_2, ..., x_{k-1}, x_{k+1}, x_n$ і одну зв'язану змінну x_k — в першому з них універсальним квантором, а в другому — екзистенціональним квантором.

До отриманих $(n-1)$-місних предикатів знову можна застосувати навішування одного із кванторів по одній із вільних змінних. В результаті отримаємо $(n-2)$-місні предикати, до яких знову можна застосувати навішування одного із кванторів по одній із вільних змінних і т.д.. Такі операції квантифікування предикатів можна продовжити до тих пір, поки не вичерпаються всі вільні змінні. В результаті n-кратного застосування кванторів до n-місного предиката отримається 0-місний предикат, тобто висловлення.

Зауваження. При навішуванні кванторів на предикат по тій чи іншій змінній x_k, де $x_k \in X_k$, завжди мається на увазі, що вибір значення x_k з області зміни (визначення) такої змінної не порушує всієї області визначення заданого предиката, тобто при конкретній заміні вільних предметних змінних відповідними значеннями завжди отримується певне конкретне висловлення.

10. Приклад. За допомогою навішування кванторів перетворити предикат $m \leqslant n$, де $m, n \in \mathbb{N}$ — натуральні змінні, у висловлення та встановити їх істинність.

Розв'язання. В результаті навішування кванторів на заданий предикат отримаємо такі висловлення, які запишемо як в символьній, так і в словесній формах:

1) $(\forall m)(\forall n)(m \leqslant n)$ = „Для довільного $m \in \mathbb{N}$ і довільного $n \in \mathbb{N}$ виконується нерівність $m \leqslant n$“;

2) $(\forall n)(\forall m)(m \leqslant n)$ = „Для довільного $n \in \mathbb{N}$ і довільного $m \in \mathbb{N}$ виконується нерівність $m \leqslant n$“;

3) $(\exists m)(\exists n)(m \leqslant n)$ = „Існує натуральне $m \in \mathbb{N}$ та існує натуральне $n \in \mathbb{N}$ такі, що виконується нерівність $m \leqslant n$“;

4) $(\exists n)(\exists m)(m \leqslant n)$ = „Існує натуральне $n \in \mathbb{N}$ та існує натуральне $m \in \mathbb{N}$ такі, що виконується нерівність $m \leqslant n$“;

5) $(\forall m)(\exists n)(m \leqslant n)$ = „Для довільного натурального $m \in \mathbb{N}$ існує таке натуральне $n \in \mathbb{N}$, що виконується нерівність $m \leqslant n$“;

6) $(\exists n)(\forall m)(m \leqslant n)$ = „Існує таке натуральне $n \in \mathbb{N}$, що для всіх натуральних $m \in \mathbb{N}$ виконується нерівність $m \leqslant n$“;

7) $(\forall n)(\exists m)(m \leqslant n)$ = „Для довільного натурального $n \in \mathbb{N}$ існує таке натуральне $m \in \mathbb{N}$, що виконується нерівність $m \leqslant n$“;

8) $(\exists m)(\forall n)(m \leqslant n)$ = „Існує таке натуральне $m \in \mathbb{N}$, що для всіх натуральних $n \in \mathbb{N}$ виконується нерівність $m \leqslant n$ “.

Знаючи загальновідомі з шкільної математики факти про натуральні числа та відношення $\leqslant$ (не перевищувати) між ними і аналізуючи отримані вісім різних висловлень, робимо такі висновки:

а) при навішуванні одноіменних кванторів на предикат отримуємо такі висловлення, що порядок їх навішування не змінює змісту отримуваних висловлень і, отже, не змінює істинносного значення висловлення; тому очевидно, що перші два висловлення 1), 2) хибні, а наступні два — 3), 4) — істинні;

б) при навішуванні на предикат різноіменних кванторів отримуємо такі висловлення, що порядок їх навішування, як правило, змінює зміст отримуваних висловлень, що може призвести і до зміни їх істинносних значень.

Так, висловлення 5), можна перефразувати у формі: „Для довільного натурального числа $m \in \mathbb{N}$ знайдеться не менше за нього натуральне число $n \in \mathbb{N}$“, яке, очевидно, істинне, а висловлення 6), в якому змінено порядок навішування кванторів в порівнянні з

5), можна сформулювати в такій, більш доступній для розуміння, формі: „Існує таке натуральне число $n \in \mathbb{N}$, що всі натуральні числа $m \in \mathbb{N}$ не перевищують це число", тобто, більш коротко і ще доступніше для розуміння, „Існує (по суті) найбільше натуральне число", яке, очевидно, є хибним висловленням. Аналогічна ситуація спостерігається і для висловлень 7) і 8), а саме: висловлення 7) сформулюємо у вигляді: „Для довільного натурального $n \in \mathbb{N}$ знайдеться не більше за нього натуральне число $m \in \mathbb{N}$", яке, очевидно, істинне, а висловлення 8), в якому змінено порядок навішування кванторів в порівнянні з 7), сформулюємо в такій формі: „Існує (по суті) найменше натуральне число", яке, очевидно, теж істинне.

11. Більш глибокий аналіз досліджень при навішуванні кванторів на довільний предикат дозволяє зробити такі два важливих висновки:

а) при навішуванні одноіменних кванторів на предикат зміна порядку їх навішування не порушує рівносильності отримуваних результатів, тобто мають місце рівносильності виду:

$$(\forall x_k)(\forall x_l)A(x_1, x_2, ..., x_n) \equiv (\forall x_l)(\forall x_k)A(x_1, x_2, ..., x_n);$$

$$(\exists x_k)(\exists x_l)A(x_1, x_2, ..., x_n) \equiv (\exists x_l)(\exists x_k)A(x_1, x_2, ..., x_n),$$

де $1 \leqslant k, l \leqslant n$**;** $A(x_1, x_2, ..., x_n)$ **—** n**-місний предикат.** Зауважимо, що у зв'язку з такими рівносильностями одноіменні квантори з різними змінними записуються у вигляді одного квантора з кількома змінними, тобто замість запису $(\forall x_k)(\forall x_l)$ чи $(\exists x_k)(\exists x_l)$ вживають відповідно записи $(\forall x_k, x_l)$, $(\exists x_k, x_l)$, в яких порядок розташування змінних не впливає на остаточний результат;

б) при навішуванні різноіменних кванторів $A(x_1, x_2, ..., x_n)$ **на предикат має місце логічне слідування предиката** $(\forall x_k)(\exists x_l)A(x_1, x_2, ..., x_n)$**з предиката** $(\exists x_l)(\forall x_k)A(x_1, x_2, ..., x_n)$**, тобто** $(\exists x_l)(\forall x_k)A(x_1, x_2, ..., x_n) \Rightarrow$ $\Rightarrow (\forall x_k)(\exists x_l)A(x_1, x_2, ..., x_n)$**.**

Яскравим підтвердженням такого логічного слідування є якраз розгляд прикладу про навішування різноіменних кванторів на двомісний предикат $m \leqslant n$, де $m, n \in \mathbb{N}$ — натуральні числа. До речі, навіть розгляд цього нескладного прикладу вказує на ті багаті можливості, що мають місце при застосуванні навішування кванторів на предикати.

4.5 Формули логіки предикатів; порядок виконання дій; види формул, їх рівносильність та спрощення

1. Поняття формули в логіці предикатів вводиться аналогічно тому, як це робилося в алгебрі висловлень. Але оскільки алгебра висловлень є елементарною складовою частиною логіки предикатів, то зрозуміло, що кожна формула алгебри висловлень є одночасно і формулою логіки предикатів. Разом з тим, в логіці предикатів поняття формули безсумнівно має бути значно ширшим, оскільки алгебру висловлень можна вважати лише логікою 0-місних предикатів, в той час як в логіці предикатів розглядаються предикати довільної місності і над цими предикатами вводиться більш широке коло операцій в порівнянні з тим, що мало місце в алгебрі висловлень.

2. Як і в алгебрі висловлень було введено поняття змінного висловлення, так і в логіці предикатів вводиться поняття **змінного предиката** (інша назва — предикатний символ).

Запис виду $\Psi(t_1, t_2, ..., t_n)$, де $n \in \mathbb{N}$ — натуральне число, називається **n-місним змінним предикатом**, якщо замість цього виразу при його використанні можна завжди підставити довільний n-місний конкретний (іноді, говорять, сталий) предикат $A(x_1, x_2, ..., x_n)$ з предметними змінними і відповідними базисними множинами $X_1, X_2, ..., X_n$ для цих предметних змінних $x_1 \in \in X_1, x_2 \in X_2, ..., x_n \in X_n$.

Частинним випадком n-місного змінного предиката будемо вважати нуль-місний (0-місний) змінний предикат, який записується у виді, наприклад, Ψ і замість нього можна підставити довільний 0-місний конкретний предикат; іншими словами, під записом Ψ можна розуміти змінне висловлення.

3. Ввівши поняття змінного предиката, далі можна за допомогою символів, якими позначалися найпростіші операції та квантифікація над предикатами, утворювати, говорять, формули логіки предикатів по аналогії з тим, як були введені формули в алгебрі висловлень.

Більш точне **означення формули логіки предикатів** (або, говорять, предикатної формули) подамо так:

Означення 4.5.1. *1. Усі змінні та сталі предикати (в тому числі, очевидно, і висловлення), які не містять символів найпростіших логічних операцій* $\wedge, \vee, \to, \leftrightarrow,$ *заперечення і навішування кванторів, є формулами; їх називають* ***елементарними предикатними формулами****.*

2. Якщо Φ, Φ_1, Φ_2 *— формули, то* $(\Phi_1) \wedge (\Phi_2)$, $(\Phi_1) \vee (\Phi_2)$, $(\Phi_1) \to \to (\Phi_2)$, $(\Phi_1) \leftrightarrow (\Phi_2)$, $\overline{\Phi}$, $(\forall x)(\Phi)$, $(\exists x)(\Phi)$ *— формули.*

3. Інших формул, крім перелічених в пунктах 1, 2, немає.

Отже, предикатна формула — це послідовність символів, що утворена елементарними формулами, які з'єднані між собою символами логічних операцій та круглими дужками (,), як вказано в пунктах 1 — 3 означення формули.

Приклади:

1) $\Phi(x, y)$; a; b; $\Phi(x_0, y_0)$ — формули, де a, b — змінні висловлення.

2) $(\forall xy)\Phi(x, y)$; $a\Psi(x)$ — не є формулами.

3) $(a \vee \Phi(x)) \to (\exists y)\Psi(x, y)$ — формула.

4) $(\Phi(x) \to \Psi(x))\Phi_1(x, y)$ не є формула.

5) $3 \leqslant 4 \to \Phi(x)$ формула.

Зауваження. В більш строгіших викладах логіки предикатів (не на інтуїтивному, а на формалізованому підході) в поняття формули часто не вводять поняття конкретних предикатів, конкретних висловлень.

Відмітимо також, що коли $\varphi(a, b, c, ...,)$ — формула агебри висловлень і $\Phi_1, \Phi_2, ..., \Phi_3$ — предикатні формули, то вираз $\varphi(\Phi_1, \Phi_2, ..., \Phi_3)$ є теж предикатною формулою.

4. З метою спрощення запису предикатних формул, зменшення кількості дужок та полегшення розгляду і дослідження цих формул домовляються, як і в алгебрі висловлень, про наступний порядок виконання операцій, перелічуючи їх в порядку „старшинства“, тобто в порядку першочерговості їх виконання:

навішування квантора;
заперечення;
кон’юнкція;
диз’юнкція;
імплікація;
еквіваленція.

Дужки в формулі залишаємо, якщо їх відкидання порушує порядок виконання операції або для полегшення аналізу структури формули. Якщо в формулі зустрічаються дужки, то операції в першу чергу виконуються в дужках.

Наприклад, запис $(\forall x, y)\ \Phi(x, y)$ слід розуміти як вираз $(\forall y)((\forall x)\Phi(x, y))$, в якому спочатку виконується операція навішування універсального квантора на двомісний предикат $\Phi(x, y)$ по змінній x, а після цього наступною операцією є навішування універсального квантора на одномісний предикат $(\forall x)\Phi(x, y)$ по змінній y.

Зауважимо, що в записах $(\forall x)(\Phi)$ чи $(\exists x)(\Phi)$ формулу Φ називають **областю дії квантора по предметній змінній** x; тоді ця змінна x, яка може бути присутньою у формулі Φ, називається зв’язаною даним квантором. Наприклад, в записі формули $(\forall x)\Phi(x, y) \to \Psi(x)$, який складається з двох частин $(\forall x)\Phi(x, y)$ і $\Psi(x)$ маємо: в першій частині предметна змінна зв’язана універсальним квантором, а в другій частині ця сама змінна вільна; тому ця формула має дві вільні змінні та одну зв’язану предметну змінну.

5. На основі рівносильності предикатів введемо поняття **рівносильністі предикатних формул**.

Означення 4.5.2. *Предикатні формули* Φ_1 *і* Φ_2 *називаються рівносильними між собою, що позначаються символічно у вигляді* $\Phi_1 \equiv \Phi_2$, *якщо при будь-якій заміні в них змінних предикатів на відповідні конкретні предикати ці формули перетворяться в рівносильні предикати.*

Як і в алгебрі висловлень, в логіці предикатів можна здійснювати **рівносильні перетворення над предикатними формулами**.

Означення 4.5.3. *Перетворення над предикатною формулою Φ називається рівносильним, якщо здійснюється перехід від цієї заданої формули Φ до формули Ψ, яка рівносильна заданій, тобто, коли говорять, що над формулою Φ здійснили рівносильне перетворення, в результаті якого отримали формулу Ψ, то це означає, що формулу Φ замінили такою формулою Ψ, що виконується рівносильність $\Phi \equiv \Psi$ цих формул.*

6. На практиці часто виникає питання, як встановити, чи задані дві предикатні формули рівносильні між собою, чи ні. Аналогічне запитання для встановлення рівносильності формул в алгебрі висловлень завжди розв'язується шляхом складання та порівняння між собою відповідних цим формулам таблиць істинності. Для предикатних же формул в загальному вигляді не існує загального способу встановлення їх рівносильності. Для деяких нескладних предикатних формул рівносильність можна встановити міркуваннями або використанням ряду загальноприйнятих законів логіки предикатів, про що йтиме мова нижче.

В даний момент лише відмітимо, що в логіці предикатів, як і в алгебрі висловлень, для здійснення рівносильних перетворень над предикатними формулами також можна використовувати і **принцип заміни: якщо в довільній предикатній формулі Φ замінити довільну її частину Φ_1, що є формулою, на рівносильну до Φ_1 формулу Φ_2, то отримається формула Ψ, яка рівносильна Φ.**

7. Поряд із задачею встановлення того, чи задані предикатні формули рівносильні між собою, виникає і питання про **спрощення** тієї чи іншої **предикатної формули**.

Означення 4.5.4. *Під спрощенням заданої формули розуміють заміну її на нову рівносильну їй формулу таку, яка має простішу структуру, має менше символів.*

Розв'язати таку задачу спрощення предикатної формули, як правило, можливо шляхом використання таких законів логіки предикатів, які можна записати у вигляді рівносильностей.

8. Множину всіх предикатних формул логіки предикатів можна розбити на такі три класи:

1) **тотожно істинні формули** або, говорять, **тавтології** — це такі формули, які при будь-якій заміні в них змінних предикатів на відповідні конкретні предикати перетворюються в тотожно істинні предикати; те, що формула Φ — тавтологія, часто позначають у вигляді $\models \Phi$.

2) **тотожно хибні формули** — це такі формули, які при будь-яких замінах предикатів на відповідні конкретні предикати перетворюються в тотожно хибні предикати.

3) **нейтральні формули** — це такі формули, які при деяких замінах в них змінних предикатів на відповідні конкретні предикати перетворюються в нейтральні предикати.

Іноді в логіці предикатів розглядають клас **виконуваних предикатних формул**: це такі формули, які не є тотожно хибними, тобто вони — або тотожно істинні, або ж нейтральні. Очевидно, що цей клас є об'єднанням двох класів — тавтологій і нейтральних формул.

Означення предикатних формул відмічених вище класів можна подати символічно у такій формі:

Φ — тотожно істинна формула $\overset{df}{\Longleftrightarrow} \Phi \equiv T \overset{df}{\Longleftrightarrow} p(\Phi) = 1;$

Φ — тотожно хибна формула $\overset{df}{\Longleftrightarrow} \Phi \equiv F \overset{df}{\Longleftrightarrow} p(\Phi) = 0;$

Φ — нейтральна формула $\overset{df}{\Longleftrightarrow} \Phi \neq T \wedge \Phi \neq F \overset{df}{\Longleftrightarrow} p(\Phi) \neq 1 \wedge$ $\wedge\, p(\Phi) \neq 0;$

Φ — виконувана формула $\overset{df}{\Longleftrightarrow} \Phi \neq F \overset{df}{\Longleftrightarrow} p(\Phi) \neq 0$, де $p(\Phi)$ — істинносне значення предиката, отриманого при довільній заміні змінних предикатів в формулі Φ на конкретні предикати.

9. Виходячи з означення заперечення предиката, легко бачити, що між формулами наведених вище трьох класів предикатних формул мають місце такі взаємозв'язки, які можна виразити на мові логічної еквівалентності:

1) Φ — тавтологія $\Leftrightarrow \overline{\Phi}$ — тотожно хибна формула;

2) Φ — тотожно хибна формула $\Leftrightarrow \overline{\Phi}$ — тавтологія;

3) Φ — нейтральна формула $\Leftrightarrow \overline{\Phi}$ — нейтральна формула.

Зв'язок між рівносильністю предикатних формул Φ_1, Φ_2 можна виразити на мові тавтологій, а саме:

$\Phi_1 \equiv \Phi_2$ тоді і тільки тоді, коли $\models (\Phi_1 \leftrightarrow \Phi_2)$, тобто коли $\Phi_1 \leftrightarrow \Phi_2$ — тавтологія, або ж $\Phi_1 \Leftrightarrow \Phi_2$.

10. Зрозуміло, що, як і в алгебрі висловлень, в логіці предикатів надзвичайно важливу роль відіграють тавтології. Як уже не раз відмічалося, **алгебра висловлень** — це невелика елементарна частина логіки предикатів, це є **логіка 0-місних предикатів**. Тому всі тавтології алгебри висловлень є тавтологіями і логіки предикатів. Більше того, очевидною є така теорема, яка є джерелом утворення нових тавтологій логіки предикатів.

Теорема 4.5.1. ***Теорема заміни.*** *Якщо* $\Phi(a, b, c, ...)$ *— тавтологія алгебри висловлень, то формула* $\Phi(\varphi, \psi, \chi, ...)$*, отримана з цієї тавтології заміною змінних висловлень* $a, b, c, ...$ *на довільні предикати* $\varphi, \psi, \chi, ...$*, є тавтологією логіки предикатів, що символічно можна подати у вигляді:* $\models \Phi(a, b, c, ...) \Rightarrow \models \Phi(\varphi, \psi, \chi, ...)$.

Наприклад: $\models (a \vee \overline{a}) \Rightarrow \models \Phi(x_1, x_2, x_3, ...) \vee \overline{\Phi(x_1, x_2, x_3, ...)}$.

11. Як уже відмічалося вище, в логіці предикатів, як і в алгебрі висловлень, важливими задачами є такі, як:

а) встановлення типу формул;

б) встановлення рівносильності формул;

в) спрощення формул.

Але, якщо в алгебрі висловлень такі задачі можна було розв'язувати двома такими шляхами:

а) за допомогою складання відповідних таблиць істинності формул та аналізу цих таблиць;

б) за допомогою використання властивостей операцій, законів алгебри висловлень,
то в логіці предикатів, як правило, такі задачі можна розв'язувати лише використанням властивостей операцій, законів логіки предикатів, певними міркуванням та умовиводами.

4.6 Деякі закони логіки предикатів

1. Серед предикатних формул, як було відмічено раніше, особливу роль відіграють тавтології та тотожно хибні формули. А оскільки заперечення тотожно хибної формули перетворює її в тавтологію, то в першу чергу можна досліджувати лише тавтології. Саме тавтології є джерелом утворенням **законів логіки предикатів**. Використання таких законів дає можливість проводити правильні умовиводи, утворювати правильні форми таких міркувань, які не залежатимуть від конкретного змісту, а тому їх можна застосувати в різноманітних дослідженнях, в наукових пошуках. Саме завдяки їм можна чітко формулювати різноманітні твердження та обґрунтовувати їх.

2. Оскільки тавтологій в логіці предикатів є безліч, то в ролі її законів береться, як правило, невелика така їх частина, в яку входять в першу чергу ті тавтології, які найчастіше застосовуються при встановлені правильних форм умовиводів, при доведенні математичних тверджень, які не залежать від конкретного змісту і носять загальний характер. Зрозуміло, що в силу того, що алгебра висловлень є невід'ємною складовою частиною логіки предикатів, логічні закони алгебри висловлень є одночасно і законами логіки предикатів. Разом з тим в логіці предикатів, яка є набагато ширшою, змістовнішою частиною математичної логіки, можна виділити в ролі логічних законів в першу чергу такі, в записі яких приймають участь квантори.

3. Зауваження. Записи наступних логічних законів наведемо в формі логічних еквівалентностей та логічних слідувань виду $\Phi \Leftrightarrow \Psi$, $\Phi \Rightarrow \Psi$, які відповідно означають, як ми знаємо, виконання рівносильності $\Phi \equiv \Psi$ та істинність еквіваленції $\Phi \to \Psi$, яку можна подати і записом: $\models (\Phi \to \Psi)$, між предикатними формулами Φ, Ψ. При цьому в предикатних формулах при записі законів будемо вказувати лише зв'язані змінні або ж деякі вільні змінні, які можуть бути присутніми, відносно вжитих кванторів в цих формулах. Наприклад, в записах виду: $(\forall x)(\Phi(x) \vee \Psi(y))$, $(\exists x)(\Phi(x) \vee \Psi(y))$ присутня зв'язана предметна змінна x і вільна предметна змінна y, присутність якої не є обов'язковою; мається на увазі, що в цих записах можуть бути присутніми й інші вільні предметні змінні, які з метою спрощення записів опущені.

4. Далі наведемо список найбільш вживаних логічних законів з кванторами, які є новими по відношенню до законів алгебри висловлень, в якій відсутня операція навішування кванторів на висловлення, оскільки висловлення не містять предметних змінних.

$$\overline{(\forall x)\Phi(x)} \Leftrightarrow (\exists x)\overline{\Phi(x)} \text{ — закон де Моргана.} \tag{4.6.1}$$

$$\overline{(\exists x)\Phi(x)} \Leftrightarrow (\forall x)\overline{\Phi(x)} \text{ — закон де Моргана.} \tag{4.6.2}$$

$$(\forall x)\Phi(x) \Leftrightarrow \overline{(\exists x)\overline{\Phi(x)}} \text{ — вираження квантора за допомогою двоїстого до нього квантора і заперечення.} \tag{4.6.3}$$

$$(\exists x)\Phi(x) \Leftrightarrow \overline{(\forall x)\overline{\Phi(x)}} \text{ — вираження квантора за допомогою двоїстого до нього квантора і заперечення.} \tag{4.6.4}$$

$$\forall x)(\Phi(x) \wedge \Psi(x)) \Leftrightarrow ((\forall x)(\Phi(x) \wedge (\forall x)\Psi(x))) \text{ — перенесення універсального квантора через кон'юнкцію.} \tag{4.6.5}$$

$$(\exists x)(\Phi(x) \vee \Psi(x)) \Leftrightarrow ((\exists x)(\Phi(x) \vee (\exists x)\Psi(x))) \text{ — перенесення екзистенціонального квантора через диз'юнкцію.} \tag{4.6.6}$$

$$(\forall x)(\forall y)\Phi(x,y) \Leftrightarrow (\forall y)(\forall x)\Phi(x,y) \text{ — комутативність універсальних кванторів.} \tag{4.6.7}$$

$$(\exists x)(\exists y)\Phi(x,y) \Leftrightarrow (\exists y)(\exists x)\Phi(x,y) \text{ — комутативність екзистенціональних кванторів.} \tag{4.6.8}$$

$$(\forall x)(\Phi(x) \vee \Psi(y)) \Leftrightarrow ((\forall x)\Phi(x) \vee \Psi(y)). \tag{4.6.9}$$

$$(\exists x)(\Phi(x) \wedge \Psi(y)) \Leftrightarrow ((\exists x)\Phi(x) \wedge \Psi(y)). \tag{4.6.10}$$

$$(\forall x)(\forall y)(\Phi(x) \vee \Psi(y)) \Leftrightarrow (\forall x)\Phi(x) \vee (\forall y)\Psi(y). \tag{4.6.11}$$

$$(\exists x)(\exists y)(\Phi(x) \wedge \Psi(y)) \Leftrightarrow (\exists x)\Phi(x) \wedge (\exists y)\Psi(y). \qquad (4.6.12)$$

$$(\forall y)(\Phi(x) \to \Phi(y)) \Leftrightarrow (\Phi(x) \to (\forall y)\Phi(y)). \qquad (4.6.13)$$

$$(\exists y)(\Phi(x) \to \Phi(y)) \Leftrightarrow (\Phi(x) \to (\exists y)\Phi(y)). \qquad (4.6.14)$$

$$(\forall x)(\Phi(x) \to \Phi(y)) \Leftrightarrow ((\exists x)\Phi(x) \to \Psi(y)). \qquad (4.6.15)$$

$((\forall x)\Phi(x)) \Rightarrow \Phi(x)$ — вилучення
універсального квантора. (4.6.16)

$\Phi(x) \Rightarrow (\exists x)\Phi(x)$ — внесення
екзистенціонального квантора. (4.6.17)

$(\forall x)(\Phi(x) \to \Psi(x)) \Rightarrow ((\forall x)(\Phi(x) \to (\forall x)\Psi(x))$
— перенесення універсального
квантора через імплікацію. (4.6.18)

$(\forall x)(\Phi(x) \to \Psi(x)) \Rightarrow (\exists x)\Phi(x) \to (\exists x)\Psi(x))$
— перенесення квантора через імплікацію. (4.6.19)

$(\exists x)(\forall x)(\Phi(x,y) \Rightarrow (\forall y)(\exists x)\Phi(x,y)$
— різнойменні квантори не комутативні. (4.6.20)

$((\forall x)\Phi(x) \vee (\forall x)\Psi(x)) \Rightarrow (\forall x)(\Phi(x) \vee \Psi(x))$ — перенесення
універсального квантора через диз'юнкцію. (4.6.21)

$(\exists x)(\Phi(x) \wedge \Psi(x)) \Rightarrow ((\exists x)\Phi(x) \wedge (\exists x)\Psi(x))$ — перенесення
екзистенціонального квантора через диз'юнкцію. (4.6.22)

$$(\forall x)(\Phi(x) \leftrightarrow \Psi(x)) \Rightarrow ((\forall x)\Phi(x) \leftrightarrow (\forall x)\Psi(x)) \text{ — перенесення універсального квантора через еквіваленцію.} \quad (4.6.23)$$

5. Доведення перелічених вище законів логіки предикатів можна провести на основі означень введених раніше логічних операцій, властивостей цих операцій, законів алгебри висловлень та логічних міркувань, проведених на їх основі.

Проведемо для зразка конкретне доведення деяких з цих законів.

Доведемо, наприклад, один із законів де Моргана — логічну еквівалентність (4.6.1), тобто істинність еквіваленції $(\overline{(\forall x)A(x)} \leftrightarrow \leftrightarrow (\exists x)\overline{A(x)})$, в якій взято довільний конкретний предикат $A(x)$, з певною областю визначення D_A і областю істинності $I_A \subset D_A$ замість змінного предиката $\Phi(x)$, який записаний в логічному законі (4.6.1).

Розглянемо ліву частину $\overline{(\forall x)A(x)}$ цієї еквіваленції. Те, що ця ліва частина є істинним висловленням, рівносильне тому, що висловлення $(\forall x)A(x)$ хибне, яке в свою чергу рівносильне тому, що предикат виконуваний $\overline{A(x)}$; а останнє, очевидно, рівносильне тому, що висловлення $(\exists x)\overline{A(x)}$ істинне, чим і завершується „словесне“ доведення еквівалентності (4.6.1) ■

Символічно це доведення прийме вигляд такого ланцюжка рівносильностей: $(p(\overline{(\forall x)A(x)}) = T) \equiv (p((\forall x)A(x)) = F) \equiv \equiv (I_A \neq D_A) \equiv (I_{\overline{A}} \neq \varnothing) \equiv (p((\exists x)\overline{A(x)}) = T)$, або ж такого: $(p(\overline{(\forall x)A(x)}) = F) \equiv (p((\forall x)A(x)) = T) \equiv (I_A = D_A) \equiv (I_{\overline{A}} = = \varnothing) \equiv (p((\exists x)\overline{A(x)}) = F)$.

6. Доведемо ще, наприклад, закон (4.6.5) про перенесення універсального квантора через кон'юнкцію. Підставимо замість змінних предикатів $\Phi(x)$ і $\Psi(x)$ довільні конкретні предикати $A_1(x)$ і $A_2(x)$, які мають області істинності I_{A_1} і відповідно I_{A_2}, що розглядаються на спільній області існування $D_{A_2} = D_{A_2} = D$, яка містить вказані області істинності цих предикатів. В результаті доведення закону (4.6.5) зведеться до доведення рівносильності висловлень $(\forall x)(A_1(x_1) \wedge A_2(x)) \equiv ((\forall x)A_1(x) \wedge (\forall x)A_2(x))$.

Очевидно, що рівносильність $a \equiv b$ висловлень a, b має місце в тому і лише в тому випадку, коли має місце рівносильність $(p(a) =$

$= T) \equiv (p(b) = T)$ або рівносильність $(p(a) = F) \equiv (p(b) = F)$, де $p(c)$ — це істинносне значення висловлення c.

Для доведення потрібної нам рівносильності $(\forall x)(A_1(x) \wedge \wedge A_2(x)) \equiv ((\forall x)A_1(x) \wedge (\forall x)A_2(x))$ застосуємо наступний ланцюжок рівносильностей: $(p((\forall x)(A_1(x) \wedge A_2(x)) = T) \equiv (I_{A_1 \wedge A_2} = D) \equiv \equiv (I_{A_1} \cap I_{A_2} = D) \equiv (I_{A_1} = D \wedge I_{A_2} = D) \equiv (p((\forall x)A_1(x)) = = T \wedge p((\forall x)A_2(x)) = T \equiv (p((\forall x)A_1(x) \wedge (\forall x)A_2(x))) = T)$, з якого і випливає потрібна для доведення рівносильность ■

„Словесне“ **доведення** потрібної рівносильності: $(\forall x)(A_1(x) \wedge \wedge A_2(x)) \equiv ((\forall x)A_1(x) \wedge (\forall x)A_2(x))$ матиме наступний вигляд міркувань.

Нехай висловлення $(\forall x)(A_1(x) \wedge A_2(x))$ лівої частини цієї рівносильності істинне; в силу означення це буде тоді і тільки тоді, коли предикат $A_1(x) \wedge A_2(x)$ тотожно істинний; останнє, в силу означення тотожної істинності кон'юнкції предикатів означає, що $A_1(x)$ і $A_2(x)$ — тотожно істинні предикати; а це в свою чергу показує, що обидва висловлення $(\forall x)A_1(x)$, $(\forall x)A_2(x)$ істинні, що рівносильно тому, що і їх кон'юнкція $(\forall x)A_1(x) \wedge (\forall x)A_2(x)$ істинна, чим і завершується це „словесне“ доведення ■

7. Зауважимо, що коли якась предикатна формула не є законом логіки предикатів, то досить навести хоча б один конкретний предикат, при якому ця формула перетворюється в предикат, який не є тотожно істинним, тобто при конкретних значеннях предметних змінних ця формула перетворюється в хибне висловлення. А якщо ж досліджувати, що ця формула є логічним законом, то слід проводити міркування для довільних конкретних предикатів і показувати, що вона перетворюється в тотожно істинний предикат.

Наприклад, розглянемо закон (4.6.20), який стверджує, що різнойменні квантори не комутують:

$$(\exists x)(\forall x)\Phi(x, y) \Rightarrow (\forall y)(\exists x)\Phi(x, y).$$

Для його **доведення** покажемо, що істинною є імплікація $((\exists x)(\forall y)A(x, y) \to (\forall y)(\exists x)A(x, y))$, де $A(x, y)$ — довільний конкретний предикат з областю визначення D_A. Нехай висловлення $(\forall y)(\exists x)A(x, y)$ хибне; покажемо, що тоді і висловлення $(\exists x)(\forall y)A(x, y)$ хибне, тобто, в силу законів (4.6.1 — 4.6.4), висловлення $(\forall x)(\exists y)\overline{A(x, y)}$ істинне. Дійсно, з хибності висловлення

$(\forall y)(\exists x)A(x,y)$ робимо висновок про те, що предикат $\overline{(\exists x)A(x,y)}$ виконуваний, тобто при деякому значенні y_0, зв'язаному з областю визначення D_A, висловлення $\overline{(\exists x)A(x,y_0)}$ істинне або, що рівносильно, висловлення $(\forall x)\overline{A(x,y_0)}$ істинне, з якого, в силу закону 4.6.17, випливає істинність висловлення $(\forall x)(\exists y)\overline{A(x,y)}$, що і треба було довести ■

А тепер розглянемо запис логічного слідування, позначивши його $(*)$:

$$(\forall y)(\exists x)\Phi(x,y) \Rightarrow (\exists x)(\forall y)\Phi(x,y), \quad (*)$$

і покажемо, що воно не є логічним законом, тобто імплікація $((\forall y)(\exists x)A(x,y) \to (\exists x)(\forall y)A(x,y))$ перетворюється в хибне висловлення хоча би при одному конкретному предикаті $A(x,y)$ з деякою областю визначення D_A. Візьмемо в ролі такого предиката відомий з попереднього предикат $A(x,y) =$„$m \leqslant n$“, де нехай $D_A = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. В результаті вказана імплікація прийме такий вигляд:

$$(\forall n)(\exists m)(m \leqslant n) \to (\exists m)(\forall n)(m \leqslant n),$$

де $m, n \in \mathbb{Z}$, а $\mathbb{Z}$ — це множина всіх цілих чисел.

В цій імплікації умова „Для довільного цілого числа $n \in \mathbb{Z}$ знайдеться таке ціле число $m \in \mathbb{Z}$, яке не перевищує n“ є, очевидно, істинним висловленням, а висновок „Існує найменше ціле число“ — хибним висловленням. Тому ця імплікація хибна. І, отже, запис $(*)$ не може бути законом логіки предикатів.

4.7 Застосування логіки предикатів до алгебри множин, до математичних формулювань

1. Кожна математична дисципліна, той чи інший розділ математики має справу з висловленнями про поняття, які вводяться та досліджуються в них. Ці висловлення можна компактно виразити певними формулами, користуючись символікою математичної логіки та специфічною символікою досліджуваного математичного розділу. В першу чергу маємо можливість символічно записувати відповідно математичні означення, теореми, доведення цих теорем. До деякої міри в зв'язку з цим тут можна було би провести аналогію з нотним записом, який, як відомо, застосовується в музиці.

2. Те чи інше означення нового поняття b за допомогою попередніх або первісних понять $a_1, a_2, ...$ можна подати символічно у такому вигляді:

$$b \overset{df}{=} S(a_1, a_2, ...) \overset{df}{\Longleftrightarrow} \Phi(a_1, a_2, ..., b), \quad (*)$$

де символ df є скороченням слова definition (означення); $\Phi(a_1, a_2, ..., b)$ — формула, яка може мати вигляд предиката (висловлювальної форми), висловлення, $S(a_1, a_2, ...)$ — запис, що містить назву для b; запис $\overset{df}{=}$, який іноді заміняють дефісом, часто символізує слово „називається“, а запис $\overset{df}{\Longleftrightarrow}$ символізує слова „тоді і тільки тоді, коли виконується“ або в скороченому варіанті — „якщо виконується“. В результаті весь запис $(*)$ можна прочитати, наприклад так: „b називається $S(a_1, a_2, ...)$, якщо виконується $\Phi(a_1, a_2, ..., b)$“.

3. Розглянемо приклади деяких математичних означень.

1. Нехай $a \in (0, +\infty)$; $t \in (0, 1) \cup (1, +\infty)$, $b \in \mathbb{R}$ — дійсні числа. Означення „число b називається логарифмом числа a при основі t, якщо виконується рівність $t^b = a$“ в символічній формі прийме такий вигляд:

$$b \overset{df}{=} \log_t a \overset{df}{\Longleftrightarrow} t^b = a.$$

2. Нехай $(x_n)_{n \in N} = x_1, x_2, ..., x_n, ...$ — числова послідовність дійсних чисел $x_n \in \mathbb{R}$, де $n \in \mathbb{N}$. Означення „число b називається границею числової послідовності $x_1, x_2, ..., x_n, ...$ тоді і тільки тоді, коли для довільного дійсного числа $\varepsilon > 0$ знайдеться таке натуральне число $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$, що для всіх натуральних $n \in \mathbb{N}$ таких, що $n_\varepsilon \leqslant n$ виконується нерівність $\mid x_n - b \mid < \varepsilon$ для всіх $x_n \in \mathbb{R}$“ символічно можна подати в такій формі: $b \overset{df}{=} \lim\limits_{n \to \infty} x_n \overset{df}{\Longleftrightarrow} (\forall \varepsilon \in$ $\in \mathbb{R})(0 < \varepsilon \to (\exists n_\varepsilon \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})(\forall x_n \in \mathbb{R})(n_\varepsilon \leqslant n \to \mid x_n - b \mid < \varepsilon))$.

3. Нехай рівняння $ax^2 + bx + c = 0$, де $a, b, c \in \mathbb{R}$ — задані дійсні числа, причому $a \neq 0$, і $x \in \mathbb{R}$ — дійсна змінна, називається квадратним.

Означення „Дійсне число D називається дискримінантом квадратного рівняння $ax^2 + bx + c = 0$, якщо $D = b^2 - 4ac$“, символічно подамо так: $D \in \mathbb{R}$ — дискримінант квадратного рівняння $ax^2 + bx + c = 0 \overset{df}{\Longleftrightarrow} D = b^2 - 4ac$, або в скороченій формі: $D \overset{df}{=} d(ax^2 + bx + c = 0) \overset{df}{\Longleftrightarrow} D = b^2 - 4ac$.

4. Означення рівності $A = B$ та включення $A \subset B$ множин $A, B \subset U$, де U — універсальна множина, розглянуті на сторінках 84, 84, символічно можна подати так:

$$A \overset{df}{=} B \overset{df}{\Longleftrightarrow} (\forall c \in U)(c \in A \leftrightarrow c \in B);$$

$$A \subset B \overset{df}{\Longleftrightarrow} (\forall c \in U)(c \in A \to c \in B).$$

5. Відоме означення рівностороннього трикутника „Трикутник ABC називається рівностороннім, якщо довжини всіх його трьох сторін рівні між собою“ символічно прийме такий вигляд: $\triangle\, ABC-$ рівносторонній $\overset{df}{\Longleftrightarrow} |AB| = |BC| = |CA|$.

Зразки символічних означень можна, наприклад, знайти при введенні нами теоретично-множинних операцій перетину, об’єднання, віднімання, доповнення тощо. Наприклад,

$$C \overset{df}{=} A \cap B \overset{df}{\Longleftrightarrow} C = \{c \in U | c \in A \wedge c \in B\};$$

$$C \overset{df}{=} A \cup B \overset{df}{\Longleftrightarrow} C = \{c \in U | c \in A \vee c \in B\};$$

$$C \overset{df}{=} A \setminus B \overset{df}{\Longleftrightarrow} C = \{c \in U | c \in A \wedge c \notin B\};$$

$$C \overset{df}{=} \overline{A} \overset{df}{\Longleftrightarrow} \overline{C} \overset{df}{=} A \setminus B \overset{df}{\Longleftrightarrow} C = \{c \in U | c \notin A\}.$$

До речі, використавши логічну символіку, можна, наприклад, поширити означення операцій об’єднання, перетину на довільне, говорять, сімейство $(A_i)_{i \in I}$ множин:

$$\bigcup_{i \in I} A_i \overset{df}{=} \{a | (\exists i \in I) a \in A_i\};$$

$$\bigcap_{i \in I} A_i \overset{df}{=} \{a | (\forall i \in I) a \in A_i\},$$

де I — множина індексів $i \in I$ (можливо і нескінченна), які позначають множини $A_i \subset U$ сімейства $(A_i)_{i \in I}$, а U — деяка універсальна множина. Отже, маємо наступні означення.

Означення 4.7.1. *Об'єднання* $\bigcup\limits_{i\in I} A_i$ *сімейства множин* $(A_i)_{i\in I}$ *— це така множина, кожний елемент якої належить хоча би одній множині цього сімейства.*

Означення 4.7.2. *Перетин* $\bigcap\limits_{i\in I} A_i$ *сімейства множин* $(A_i)_{i\in I}$ *— це така множина, кожний елемент якої належить всім множинам цього сімейства.*

Очевидно, що має місце таке співвідношення:

$$(\forall i \in I)\left(\bigcap_{i\in I} A_i \subset A_i \subset \bigcup_{i\in I} A_i\right).$$

Аналогічним чином символічно можна подати означення операцій над предикатами. Наприклад, диз'юнкцію двомісних предикатів $A(x_1, x_2)$ і $B(x_1, x_2)$, які мають спільну область визначення $D = D_A = D_B$, символічно подамо так: $C(x_1, x_2) \overset{df}{=} A(x_1, x_2) \vee$ $\vee\ B(x_1, x_2) \overset{df}{\Longleftrightarrow} (\forall(\alpha_1, \alpha_2) \in D)(p(C(\alpha_1, \alpha_2))) = p(A(\alpha_1, \alpha_2)) \vee$ $p(B(\alpha_1, \alpha_2)))$, де $p(S(\alpha_1, \alpha_2))$ — це, нагадаємо, істинносне значення предиката $S(x_1, x_2)$, в якому пара змінних $(x_1; x_2)$ замінена на пару відповідних цим змінним значень $(\alpha_1; \alpha_2) \in D_S$.

4. Зауважимо, що означення, як правило, має вигляд складного висловлення, в якому присутнє слово „називається“ або якийнебудь його синонім. Але воно не є висловленням. Мета введення означення полягає в тому, щоб ввести в дослідження нові об'єкти з новими властивостями, які розкриваються, розтлумачуються, описуються в цьому означенні, і дати їм назви. Ці нові об'єкти мають свою назву, яка присутня поряд з словом „називається“.

Тому можна вважати, що основна мета введення означень — це скоротити виклад дослідження за рахунок введення назви нового об'єкта і, особливо, вдалого символічного позначення цієї назви. Ці міркування можна підтвердити при розгляді введення будь-якого означення та супроводжуючих його назви та позначення.

Наприклад, поставивши завдання „обчислити логарифм $\log_2 \log_{\sqrt{7}} 49$“ або „обчислити границю $\lim\limits_{n\to\infty}(n - \sqrt{n^2 + 5n})$“, перш ніж приступити до розв'язування таких задач, ми повинні чітко уявляти, що саме криється під такими назвами, як „логарифм“ або „границя“, розуміти, що ці назви є скороченнями досить ємких (а особливо друга назва!) висловлень, тверджень, які справді попередньо описують дані поняття, і вони для цих задач реально існують.

5. Математичні теореми, як правило, формулюються у вигляді висловлень. Ці висловлення є по суті 0-місними предикатами, що містять квантори, рівності, нерівності, логічні слідування, логічні імплікації, що зв'язують певні формули, вирази. Предикати, як правило, є конкретними предикатами і відносяться до того чи іншого розділу математики.

Серед теорем виділяють так звані теореми існування, в формулюванні яких присутні екзистенціональні квантори. Такі теореми, як правило, розглядаються на початку дослідження того чи іншого математичного розділу, коли вводяться нові поняття та означення для них. Саме такі теореми існування повинні підтверджувати існування нових об'єктів (або ж показувати, що вони не існують), після чого можна досліджувати їх властивості, взаємозв'язки та використання.

Інші теореми, в формулюванні яких містяться універсальні квантори, квантори всезагальності (що можуть містити деякі обмеження відносно області існування), розкривають властивості нових об'єктів та відповідних їм понять, виясняють, які з властивостей є характеристичними, говорять іноді, критеріальними, що дає змогу глибше і більш детальніше розкрити внутрішню будову цих об'єктів, що сприятиме їх подальшому застосуванню.

6. Розглянемо **приклади формулювання деяких теорем.**

1. Теорему з теорії натуральних чисел „Існують натуральні числа, що діляться на 3, але не діляться на 6“ символічно можна записати у такому вигляді:

$$(\exists k, n \in \mathbb{N})(n = 6k - 3).$$

2. Теорему з теорії цілих чисел „Довільне ціле число, яке ділиться на 6, ділиться на 3“, символічно подамо у вигляді:

$$(\forall n \in \mathbb{Z})((\exists k \in \mathbb{Z})(n = 6k) \to (\exists l \in \mathbb{Z})(n = 3l)).$$

3. Теорема з теорії квадратних рівнянь „Для того, щоб квадратне рівняння з дійсними коефіцієнтами мало дійсні корені, необхідно і достатньо, щоб дискримінант цього рівняння був невід'ємним“ символічно запишеться так:

$$(\forall a, b, c, d \in \mathbb{R})(((a \neq 0 \wedge (d = b^2 - 4ac)) \to$$
$$\to ((\exists x_0 \in \mathbb{R})(ax_0^2 + bx_0 + c = 0) \Leftrightarrow (d \geqslant 0))).$$

4. Теорему „Довільна збіжна числова послідовність з дійсними членами обмежена“ подамо в такій символічній формі:

$$(\forall n \in \mathbb{N})(\forall x_n \in \mathbb{R})((\exists a \in \mathbb{R})(a = \lim_{n \to \infty} x_n) \to$$
$$\to (\exists t \in \mathbb{R})|x_n| \leqslant t).$$

5. Теорему з планіметрії „Довільні дві прямі перетинаються, або паралельні, або співпадають“ подамо у такій символічній формі, позначивши через l_1, l_2 прямі, через M — точку, а через π — площину:

$$(\forall l_1, l_2)(l_1, l_2 \subset \pi \to ((\exists M \in \pi)(l_1 \cap l_2 = \{M\} \wedge l_1 \neq l_2) \vee$$
$$\vee l_1 \cap l_2 = \varnothing \vee l_1 = l_2)).$$

6. Теорему з планіметрії „Для того, щоб паралелограм $ABCD$ був прямокутником, необхідно і достатньо, щоб довжини його діагоналей AC і BD співпадали“ запишемо символічно, позначивши за допомогою букви P множину всіх паралелограмів, а за допомогою букв P_r — множину всіх прямокутників:

$$(\forall\ ABCD \in P)(ABCD \in P_r \leftrightarrow |AC| = |BD|).$$

Відмітимо, що на практиці в будь-якому математичному розділі Ви неодноразово матимете справу з формулюванням означень та теорем про ті чи інші математичні об'єкти та поняття. Формулювання їх в компактній символічній формі часто сприятиме кращому їх розумінню, запам'ятовуванню та використанню в тій чи іншій ситуації.

7. Формулюваннями означень нових понять, об'єктів та теорем про їх існування, властивості та використання далеко не вичерпується побудова теорії того чи іншого математичного розділу. Якщо, як було відмічено вище, означення не доводяться, а однією з основних їх цілей є введення та роз'яснення назв нових об'єктів та відповідних їм понять, то теореми обов'язково, говорять, доводяться, встановлюється їх істинність шляхом міркувань з використанням законів математичної логіки. Завдяки введенню назв для нових понять виклад доведення спрощується, стає більш компактнішим та прозорішим. Само доведення теореми — це послідовність тверджень, кожне з яких є або умовою теореми, або аксіомою математичної теорії, або раніше доведеною теоремою. Всі члени цієї послідовності можна подати в символічній формі, у вигляді певних записів виразів, формул. Для того, щоб доведення було стрункішим, більш формалізованим, використовують правила виводу з математичної логіки. Деякі з цих правил уже відмічались раніше. До них також відносять **правила заміни, відокремлення.**

Правило заміни дає можливість отримати з тавтології математичної логіки формулу шляхом заміни змінних предикатів конкретними предикатами досліджуваної теорії, в результаті чого формула перетворюється в теорему в цій теорії.

Правило відокремлення (modus ponens) дає можливість з формул Φ, $\Phi \Rightarrow \Psi$ отримати як логічний наслідок формулу Ψ.

В результаті отримаємо наступне означення:

Означення 4.7.3. *Доведенням теореми* $\Phi_1 \wedge \Phi_2 \wedge \ldots \wedge \Phi_k \Rightarrow \Rightarrow \Psi$ *називається скінченний ланцюжок (скінченна послідовність) формул, кожний член якої є або аксіома даної теорії, або формула, отримана з попередніх по правилу відокремлення чи отримана по правилу заміни; остання формула цього ланцюжка і є логічним наслідком* Ψ *теореми, в якій формули* $\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_k$ *задають умову теореми, а формула* Ψ *є її логічним наслідком.*

В подальшому Ви неодноразово зустрінетеся із зразками використання математичної логіки та її законів при різноманітних записах формулювань означень, теорем та доведень цих теорем з того чи іншого розділу математики.

4.8 Питання для самоперевірки засвоєння знань та вправи

1. Як називають алгебру висловлень по відношенню до математичної логіки?
2. Наведіть конкретні приклади істинних висловлень математичної логіки, які в алгебрі висловлень зображаються формулами, що не є тавтологіями.
3. Сформулюйте класичний умовивід Арістотеля, який в алгебрі висловлень не можна зобразити тавтологією.
4. Наведіть приклади наповнення різним конкретним змістом структури умовиводу Арістотеля.
5. Чому алгебра висловлень має недостатньо засобів для здійснення більш тонкого аналізу міркувань?
6. Яка основна відмінність логіки предикатів від алгебри висловлень?
7. Як можна з висловлень утворювати предикати? Наведіть ілюструючі приклади.
8. Що розуміють під термінами „суб'єкт“ чи „об'єкт“ та „предикат“, „присудок“ при розгляді конкретного висловлення?
9. Що розуміють під терміном „висловлювальна форма“?
10. Дайте означення n-місного предиката.
11. Що таке предметні змінні та базисні множини предиката? Наведіть ілюструючі приклади.
12. Який предикат називають однорідним? Наведіть ілюструючі приклади.
13. Що розуміють під нульмісним предикатом? Наведіть ілюструючі приклади.
14. Які предикати називаються рівносильними між собою? Наведіть ілюструючі приклади.

15. Дайте означення логічного слідування між предикатами та проілюструйте відповідними прикладами.

16. Сформулюйте критерій рівносильності предикатів на мові логічного слідування між ними.

17. Які предикати називаються логічно еквівалентними між собою?

18. Сформулюйте критерії рівносильності предикатів на мові їх логічної еквівалентності.

19. Що таке логічна, предикатна функція конкретного предиката?

20. Сформулюйте критерії рівносильності предикатів на мові відповідних їм предикатних функцій.

21. Що таке бульова множина?

22. Яка функція називається бульовою?

23. Що таке область визначення предиката?

24. Що таке область істинності предиката?

25. Який взаємозв'язок встановлюється між базисними множинами, областю визначення та областю істинності предиката?

26. Проілюструйте на конкретному предикаті взаємозв'язок між областю визначення та областю істинності цього предиката.

27. Який предикат називається тотожно істинним, тотожно хибним? Наведіть ілюструючі приклади.

28. Який предикат називається нейтральним? Наведіть ілюструючі приклади.

29. Що таке виконуваний предикат? Наведіть ілюструючі приклади.

30. Сформулюйте критерій
    а) тотожної істинності;
    б) тотожної хибності;
    в) нейтральності;
    г) виконуваності
    предиката на мові його областей істинності та визначення. Проілюструйте конкретними прикладами.

31. Сформулюйте критерії рівносильності предикатів на мові їх областей істинності та визначення; проілюструйте конкретними прикладами.

32. Який взаємозв'язок існує між логічним слідуванням предикатів та їх областями істинності та визначення? Проілюструйте конкретними прикладами.

33. Що таке n-арне відношення між елементами множин? Проілюструйте на конкретних прикладах.

34. Який взаємозв'язок існує між областю істинності n-місного предиката та n-арним відношенням? Проілюструйте на конкретних прикладах.

35. Сформулюйте критерії рівносильності n-місних предикатів на мові n-арних відношень.

36. Вкажіть взаємозв'язок між рівносильністю предикатів, відповідними їм областями визначення та істинності, відповідними їм відношеннями на конкретному прикладі.

37. Дайте означення кон'юнкції двох предикатів, які мають спільну область визначення; проілюструйте на конкретному прикладі.

38. Дайте означення диз'юнкції двох предикатів, які мають спільну область визначення; проілюструйте на конкретному прикладі.

39. Дайте означення імплікації двох предикатів, які мають спільну область визначення; проілюструйте на конкретному прикладі.

40. Дайте означення еквіваленції двох предикатів, які мають спільну область визначення; проілюструйте на конкретному прикладі.

41. Дайте означення заперечення предиката; проілюструйте на конкретному прикладі.

42. Наведіть означення кон'юнкції, диз'юнкції, імплікації, еквіваленції, заперечення предикатів зі спільною областю визначення на мові істинносних значень цих предикатів.

43. Поясніть, чому властивості основних операцій над висловленнями зберігаються і для аналогічних основних операцій над предикатами; перелічіть ці властивості.

44. Вкажіть, який взаємозв'язок існує між областю істинності:
    а) кон'юнкції;
    б) диз'юнкції;
    в) імплікації;
    г) еквіваленції;
    д) заперечення
    предикатів (зі спільною областю визначення) та областями істинності цих предикатів; проілюструйте цей взаємозв'язок на конкретних прикладах.

45. Як можна вводити найпростіші бінарні операції над предикатами різної місності? Проілюструйте свої міркування на конкретних прикладах.

46. Які Ви знаєте нові операції над предикатами в порівнянні з операціями над висловленнями?

47. В чому полягає операція конкретизації змінної над предикатом? Наведіть ілюструючий приклад.

48. В чому полягає операція навішування на одномісний предикат
    а) універсального квантора;
    б) екзистенціонального квантора?
    Наведіть ілюструючі приклади.

49. Сформулюйте критерії того, щоб
    а) універсальне висловлення;
    б) екзистенціональне висловлення,
    отримане з одномісного предиката, було істинним. Наведіть ілюструючі приклади.

50. Поясніть, в яких випадках універсальне висловлення, отримане з одномісного предиката, можна замінити на кон'юнкцію висловлень; проілюструйте на конкретному прикладі.

51. Поясніть, в яких випадках екзистенціональне висловлення, отримане з одномісного предиката, можна замінити на диз'юнкцію висловлень; проілюструйте на конкретному прикладі.

52. Чому навішування на предикат універсального квантора і екзистенціонального квантора іноді називають взаємно двоїстими операціями над предикатом?

53. Що таке вільні та зв'язані предметні змінні в предикаті? Наведіть ілюструючі приклади.

54. В чому полягає операція навішування на багатомісний предикат:
    а) універсального квантора;
    б) екзистенціонального квантора?
    Наведіть ілюструючі приклади.

55. Скільки існує різних варіантів навішування кванторів на:
    а) одномісний предикат;
    б) двомісний предикат;
    в) трьохмісний предикат?

56. Поясніть на конкретному прикладі, як впливає на рівносильність зміна порядку навішування:
    а) одноіменних кванторів;
    б) різнойменних кванторів,
    на багатомісні предикати.

57. Поясніть, якими шляхами можна зменшувати місність предиката і перетворювати його навіть у висловлення.

58. Що таке змінний n-місний предикат?

59. Як можна трактувати, розуміти (тлумачити) 0-місний змінний предикат?

60. Що таке елементарна предикатна формула?

61. Дайте означення предикатної формули.

62. Наведіть приклади предикатних формул.

63. Якого порядку виконання операцій дотримуються при розгляді тієї чи іншої предикатної формули?

64. Яку роль відіграють дужки при записі предикатної формули? Коли частину дужок слід залишити? Наведіть ілюструючі приклади.

65. Що таке область дії квантора по предметній змінній?

66. Наведіть приклад предикатної формули, в якій одна і та ж предметна змінна є і вільною, і зв'язаною. Поясніть, чому таке можливо.

67. Які предикатні формули називаються рівносильними між собою? Наведіть ілюструючі приклади.

68. Які перетворення над предикатною формулою називаються рівносильними?

69. Що означає спрощення предикатної формули?

70. В чому полягає принцип заміни при виконанні рівносильних перетворень над предикатними формулами? Проілюструйте цей принцип на конкретних прикладах.

71. Які предикатні формули називаються
    а) тотожно істинними (тавтологіями);
    б) тотожно хибними;
    в) нейтральними;
    г) виконуваними?
    Наведіть ілюструючі приклади.

72. Вкажіть на мові логічної еквівалентності взаємозв'язки між тотожно істинними, тотожно хибними та нейтральними предикатними формулами.

73. Вкажіть взаємозв'язок між рівносильністю предикатних формул та їх еквіваленцією.

74. Сформулюйте теорему заміни змінних висловлень на предикати, яка є джерелом утворення з тавтологій алгебри висловлень тавтологій логіки предикатів. Проілюструйте на конкретних прикладах.

75. Чим суттєво відрізняються шляхи розв'язування таких задач, як вияснення типу формул, спрощення формул, встановлення їх рівносильності, в алгебрі висловлень і в логіці предикатів?

76. Поясніть, які формули відбирають в ролі законів логіки предикатів.

77. Перелічіть найбільш вживані закони логіки предикатів, які містять квантори.

78. Проілюструйте зразки доведень деяких законів логіки предикатів з використанням:
    а) словесних міркувань;
    б) символічних записів.

79. Вкажіть відмінність в міркуваннях, якщо потрібно показати, що дана предикатна формула:
    а) не є законом;
    б) є законом в логіці предикатів.

80. Обґрунтуйте, чому при використанні засобів математичної логіки до записів математичних формулювань та обґрунтування їх істинності можна проводити аналогію з нотним записом, який використовується в музиці?

81. Поясніть, як символічно можна записувати введення означення нових понять та відповідних їм назв на основі первісних чи попередніх понять.

82. Наведіть приклади „словесних“ означень (тобто в словесній формі) нових понять та відповідних їм „символічних“ означень (тобто в символічній формі).

83. Поясніть, чому основна мета введення означення нового поняття та відповідної йому назви полягає в скороченні викладу дослідження цього поняття.

84. Що собою представляють математичні теореми? Проілюструйте відповідними прикладами теорем.

85. Який вигляд мають теореми існування? Яка їх роль? Наведіть ілюструючі приклади.

86. Як формулюються теореми, що розкривають властивості нових об'єктів, понять? Наведіть ілюструючі приклади.

87. Що розуміють під доведенням теореми?

88. Які правила виводу з математичної логіки використовують при доведенні теорем?

89. В чому полягає правило заміни?

90. В чому полягає правило відокремлення (modus ponens)?

91. Дайте означення доведення теореми.

92. Встановити, які з наступних записів можна розглядати як предикати при певному виборі множин значень предметних змінних, що можуть входити до них:
    а) $x^2 - 3x + 2 = 0$;
    б) $2 - 5 = 1$;
    в) x при діленні на y дає остачу r;
    г) $a = 2b$;
    д) $x^2 - y^2 + z^3 - 5$;
    е) $x^2 + y^2 + 3 \leqslant 0$;
    є) x та y лежать по різні сторони від z;
    ж) Знайдеться таке x, що $3x - 5 = 2y$;
    з) При $x = 7$ має місце рівність $x + 10 = 15$;
    и) Число x кратне 5;

і) $|x| - 4 \leqslant 7$;
ї) x — від'ємне число.

93. Нехай $x, y \in \mathbb{R}$ — дійсні предметні змінні. Знайти область визначення та область істинності наступних предикатів. Зобразити ці області в координатній системі і вказати тип предиката:

а) $x^2 < 1$;
б) $x^2 \geqslant 0$;
в) $x^2 - 4x = 0$;
г) $(x - y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$;
д) $y \leqslant \sqrt{x - 1}$;
е) $|x - 3| \leqslant 4$;
є) $x^2 \leqslant \sqrt{x}$;
ж) $|x| = |y|$;
з) $x^2 + y^2 \leqslant 4$;
и) $x + \sqrt{y} = 5$.

94. Записати на мові логіки предикатів такі висловлення та встановити, істинні вони чи хибні:

а) Деякі раціональні числа є цілими;

б) Існують парні цілі числа, які не діляться на 12;

в) Ні жодне просте число не є квадратом деякого натурального числа;

г) Будь-яке натуральне число, остання цифра якого нуль, ділиться на п'ять.

95. Нехай $A_1(x) =$„$1 < x$“, $A_2(x) =$„$\sqrt{x} < 2$“, де $x \in \mathbb{R}$, — одномісні предикати. Знайти їх області визначення та області істинності. Вказати на основі цього області визначення та області істинності таких предикатів:

а) $B_1(x) = A_1(x) \wedge A_2(x)$;
б) $B_2(x) = A_1(x) \to A_2(x)$;
в) $B_3(x) = A_2(x) \to A_1(x)$;
г) $B_4(x) = A_1(x) \leftrightarrow A_2(x)$;
д) $B_5(x) = \overline{A_1(x)} \vee \overline{A_2(x)}$;
е) $B_6(x) = A_1(x) \wedge \overline{A_2(x)}$.

96. Нехай задано предикати:

$D(x, y) =$ „x є дільником для y“;
$P(x) =$ „x — парне число“;
$S(x) =$ „x — просте число“;
$Z(x) =$ „x — ціле число“.

Сформулювати звичайною мовою наступні висловлювання, записані символічно, і встановити, які з них істинні чи хибні:

а) $(\forall x)(S(x) \to \overline{P(x)});$
б) $(\forall x, y)((S(y) \wedge \overline{S(x)}) \to D(x, y));$
в) $(\forall x)(P(x) \to (\forall y)(D(x, y) \to P(y)));$
г) $(\forall x)(\exists y)(Z(x) \wedge Z(y) \to D(x, y));$
д) $(\exists x)(\forall y)(Z(x) \wedge Z(y) \to D(x, y));$
е) $(\exists x)(P(x) \wedge S(x));$
є) $(\forall x)(S(x) \wedge Z(x)).$

97. Нехай задано такі предикати з натуральними змінними:
$K(m) =$ „m — складне число“;
$M(m, n) =$ „$m < n$“;
$S(m, n, k) =$ „$m + n = k$“;
$P(m, n, k) =$ „$m \cdot n = k$“.
Записати на мові логіки предикатів наступні висловлення і встановити, які з них істинні, а які хибні:

а) для довільних $m, n \in \mathbb{N}$ знайдеться таке натуральне k, що $m + n = k$;

б) для довільних натуральних $m, n, k \in \mathbb{N}$ якщо $m + n = k$, то $n + m = k$;

в) для будь-яких натуральних $m, n \in \mathbb{N}$ існує таке натуральне $k \in \mathbb{N}$, що $m \cdot n = k$;

г) для довільних натуральних $m, n, k \in \mathbb{N}$ з рівності $m \cdot n = k$ слідує рівність $n \cdot m = k$;

д) для будь-яких натуральних $m, k \in \mathbb{N}$ знайдеться таке натуральне n, що $m + n = k$;

е) для довільних натуральних $m, k \in \mathbb{N}$ існує таке натуральне $n \in \mathbb{N}$, що $m \cdot n = k$;

є) для будь-яких натуральних $m, n \in \mathbb{N}$ $m < n$ тоді і тільки тоді, коли існує натуральне $k \in \mathbb{N}$ таке, що $m + k = n$;

ж) Для довільного натурального $m \in \mathbb{N}$ m — складне число тоді і тільки тоді, коли знайдуться натуральні $k, l \in \mathbb{N}$ такі, що $k < m, l < m$ і $k \cdot l = m$.

98. Зобразити на координатній площині області істинності та існування наступних предикатів з дійсними предметними змінними:

а) $x > 0 \wedge y \geqslant 0$;
б) $x \leqslant 0 \vee y \leqslant 0$;
в) $x < 0 \to y < 0$;
г) $x > 0 \leftrightarrow y \leqslant 0$.

99. Нехай $A(x)$ — одномісний предикат, заданий на множині X. Записати на символічній мові такі висловлення, використовуючи квантори:

а) існує хоча би один елемент множини X, що задовольняє умову $A(x)$;

б) існує не більше одного елемента множини X, що задовольняє умову $A(x)$;

в) існують хоча би два елементи множини X, які задовольняють умову $A(x)$;

г) існує не більш двох елементів множини X, які задовольняють умову $A(x)$.

100. Яким умовам задовольняють предикати $A(x)$ і $B(x)$, визначені на множині D, якщо тотожно істинним є такі предикати:
а) $A(x) \wedge B(x)$;
б) $A(x) \vee B(x)$;
в) $\overline{A(x)} \vee \overline{B(x)}$;
г) $\overline{A(x)} \wedge \overline{B(x)}$;
д) $\overline{A(x) \to B(x)}$;
е) $\overline{A(x) \leftrightarrow B(x)}$;
є) $(\forall x)(A(x) \leftrightarrow B(x)) \wedge \overline{(\exists x)(\overline{A(x)} \wedge B(x))}$;
ж) $(\forall x)(A(x) \leftrightarrow B(x)) \wedge \overline{(\exists x)(A(x) \wedge B(x))}$;
з) $B(x) \to \overline{A(x)}$;
и) $A(x) \wedge \overline{B(x)}$.

101. Використовуючи логічну символіку, записати такі висловлення та встановити, чи вони істинні, чи хибні:

а) для будь-яких дійсних чисел $x, z \in \mathbb{R}$ знайдеться таке дійсне число $y \in \mathbb{R}$, що виконуються нерівності $x < y$ і $y < z$;

б) не існує такого раціонального числа t, що задовольняє рівність $t^2 - 10 = 0$;

в) існує найбільше від'ємне ціле число;

г) існують сусідні цілі числа;

д) існує найбільше натуральне число;

е) система рівнянь $x - 2y = 0$; $3x = 6y + 1$ несумісна;

є) для довільного натурального числа знайдеться менше за нього натуральне число.

102. Побудувати заперечення таких висловлень і встановити, чи вони істинні, чи хибні:
а) $(\exists x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R})(x + y = y \wedge xy = x)$;
б) $(\forall x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R})(x^2 + y^2 > 0)$;
в) $(\forall x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R})(x + y = \sqrt{x^2 + y^2})$;
г) $(\forall x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R})(x < y \vee y < x)$;
д) $(\forall m, n, k \in \mathbb{Z})(\overline{D(m,k)} \wedge \overline{D(n,k)} \to \overline{D(m+n,k)})$,
де $D(a,b)$ — предикат „a ділиться на b“.

103. З'ясувати, які з наступних виразів є предикатними формулами; в кожній з формул вказати вільні і зв'язані предметні змінні:
а) $(\exists)\Phi_1(x) \to (\exists x)[\Phi_2(x,z)]$;
б) $(\forall x_1)(\forall x_2)(\forall x_3)(\Phi_1(x_1) \wedge \Phi_2(x_2) \wedge \Phi_3(x_3))$;
в) $(\exists x)(\forall)(\Phi_1(x) \wedge a) \leftrightarrow (\forall a)(\exists)(\Phi_2(x) \wedge b)$;
г) $(\forall x)(\Phi_1(x) \to \Phi_2(x)) \to ((\forall x)\Phi_1(x) \to (\forall x)\Phi_2(x))$;
д) $(\forall x)((\exists y)\Phi(x,y) \to \Psi(x,y,z))$;
е) $(\exists u)(\forall v)\Phi(u,v) \to (\exists t)\Phi(t,v)$;
є) $(\forall x)\Phi(x,y) \vee (\forall y)\Phi(x,y)$;
ж) $(\exists x)\Phi(x,y) \to (\forall z)\Psi_1(y,z) \wedge \Psi_1(y,v)$.

104. В доповіді колишнього генерального прокурора М. Потебенька на одній із нарад була відмічена така фраза: „Якщо громадянину все те, що не заборонено, дозволено, то державному чиновнику заборонено все те, що не дозволено“. Записати фразу в символічній формі і встановити, істинна вона, чи хибна.

105. На захисті однієї з дисертацій прозвучала фраза: „На прикладі однієї білої ворони я можу довести, що чорних ворон взагалі не буває!“. Попробуйте і Ви, з логічної точки зору, розібратись з цією фразою та вияснити, чи таке доведення справді матиме силу.

106. Перевірити, які з наступних предикатних формул рівносильні між собою:
а) $(\forall x)(\Phi(x) \to \Psi(x))$ і $((\forall x)\Phi(x) \to (\forall x)\Psi(x))$;
б) $(\exists x)(\Phi(x) \to \Psi(x))$ і $((\forall x)\Phi(x) \to (\exists x)\Psi(x))$;
в) $(\exists x)(\Phi(x) \to \Psi(x))$ і $((\exists x)\Phi(x) \to (\exists x)\Psi(x))$;
г) $(\forall x)(\Phi(x) \to \Psi(x))$ і $((\exists x)\Phi(x) \to (\forall x)\Psi(x))$.

107. Перевірити, чи є серед вказаних у вправі (106) пари предикатних формул такі, що одна із формул пари є логічним наслідком другої формули цієї пари.

108. Довести такі закони логіки предикатів:
а) $(\forall x)(\Phi(x) \leftrightarrow \Psi(x)) \Rightarrow ((\exists x)\Phi(x) \leftrightarrow (\exists x)\Psi(x))$;
б) $(\exists x)(\Phi(x) \leftrightarrow \Psi(x)) \Rightarrow ((\forall x)\Phi(x) \to (\exists x)\Psi(x))$.

109. Записати за допомогою логічної символіки гіпотезу Гольбаха „Довільне парне число більше чотирьох, є сумою двох непарних простих чисел“.

110. Зобразити на координатній площині області визначення та істинності таких предикатів з дійсними предметними змінними:
а) $(x - y < 0) \wedge x \geqslant 0$;
б) $(x^2 + y^2 \leqslant 4) \to (x^2 + y^2 < 1)$;
в) $(x^2 + y^2 = 1) \vee x < 0$;
г) $(x^2 + y^2 = 4) \vee (\sqrt{xy} > 1)$;
д) $(x^2 + y^2 < 1) \to (xy > 0)$;
е) $(x^2 + y^2 \geqslant 4) \leftrightarrow \left(\dfrac{1}{xy} \leqslant 0\right)$.

111. Знайти такі дійсні значення $a \in \mathbb{R}$, щоб другий предикат був наслідком першого, у яких предметними змінними є дійсні

числа $x \in \mathbb{R}$:

а) $x > a$ і $x > 3$;
б) $x^2 + x - 6 = 0$ і $|x| < a$;
в) $|x| < a$ і $x^2 < 16$;
г) $|x| < a$ і $x^2 - 2x + 5 = 0$;
д) $|x - 2| < a$ і $|x^2 - 4| < 5$;
е) $|x| \geqslant a$ і $|x| > 4$;
є) $x^2 + 7x + 12 = 0$ і $x - a > 2$;
ж) $|x + 3| < a$ і $|x^2 - 5x| < 6$.

112. Серед одномісних предикатів $A(x)$, $B(x)$, $C(x)$, $D(x)$, заданих на множині $\mathbb{R}$ дійсних чисел, предикат $A(x)$ є алгебраїчним рівнянням, а предикати $(A(x) \to B(x)) \to C(x)$ та $(B(x) \to \to C(x)) \to D(x)$ тотожно хибні. Довести, що $A(x)$ є рівнянням парного степеня.

113. В теледебатах народний депутат Мірошніченко відмітив: „Краще залишити непокараною винну людину, чим покарати невинну“. Записати її в символічній формі та вказати рівносильну їй, більш просту за формою.

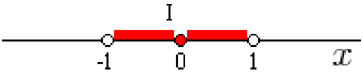
4.9 Відповіді та вказівки до розв'язання деяких вправ

№ 92.

а), б), в), г), е), є), ж), з), и), і), ї).

№ 93.

а) $D = \mathbb{R}; I = (-1; 1)$ (мал. 1.13).

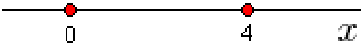


Мал. 1.13.

б) $D = \mathbb{R}; I = \mathbb{R}$ (мал. 1.14).

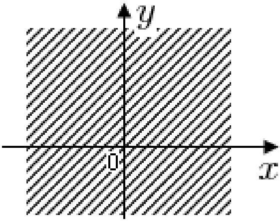
Мал. 1.14.

в) $D = \mathbb{R}; I = \{0; 4\}$ (мал. 1.15).

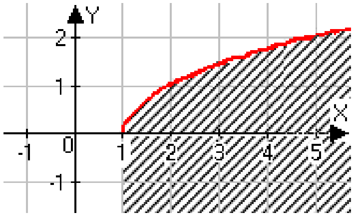


Мал. 1.15.

г) $D = \mathbb{R} \times \mathbb{R}; I = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, (мал. 1.16).



Мал. 1.16.

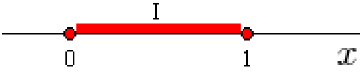


Мал. 1.17.

д) $D = [1; +\infty) \times \mathbb{R}; I = \{(x; y)|x \geqslant 1 \wedge y \leqslant \sqrt{x-1}\}$ (мал. 1.17).
е) $D = \mathbb{R}; I = [-1; 7]\}$ (мал. 1.18).

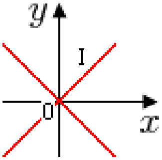
Мал. 1.18.

є) $D = [0; +\infty); I = [0; 1]\}$ (мал. 1.19).



Мал. 1.19.

ж) $D = \mathbb{R} \times \mathbb{R};$ $= |y|\}\}$ (мал. 1.20).



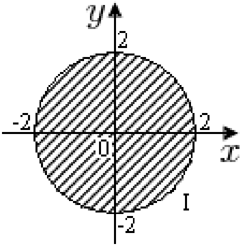
Мал. 1.20.

з) $D = \mathbb{R} \times \mathbb{R}; I = \{(x; y)|x^2 + y^2 \leqslant 4\}\}$ (мал. 1.21).
и) $D = \mathbb{R} \times [0; +\infty); I = \{(x; y)|x + \sqrt{y} = 5\}\}$ (мал. 1.22).

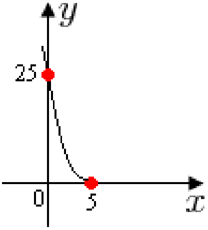
№ 94.

а) $(\exists x \in \mathbb{Q})(x \in \mathbb{Z});$

б) $(\exists x \in \mathbb{Z})(x \vdots 2 \wedge x \vdots 12);$



Мал. 1.21.



Мал. 1.22.

в) $\overline{(\exists p \in P)(\exists k \in \mathbb{N})(p = k^2)}$, де P — множина всіх простих чисел;

г) $(\forall n \in \mathbb{N})(n \vdots 10 \to n \vdots 5)$.

Всі висловлення істинні.

№ 95.

$D_{A_1} = \mathbb{R}; I_{A_1} = (1; +\infty)$; $D_{A_2} = [0; +\infty]; I_{A_2} = (0; 4)$;

а) $D = [0; +\infty); I = (1; 4)$;

б) $D = [0; +\infty); I = [0; 4)$;

в) $D = [0; +\infty); I = (1; +\infty)$;

г) $D = [0; +\infty); I = (1; 4)$;

д) $D = [0; +\infty); I = [0; 1] \cup [4; +\infty)$;

е) $D = [0; +\infty); I = [4; +\infty)$.

№ 96.

а) „Просте число непарне“— хибне;

б) „Просте число ділиться на непросте число“— хибне;

в) „Число, що ділиться на парне число, є парним“—істинне;

г) „Ціле число є дільником деякого цілого числа"— істинне;

д) „Існує цілий дільник для всіх цілих чисел"— істинне;

е) „Існує парне просте число"— істинне;

є) „Всі числа прості і цілі"— хибне.

№ 97.

а) $(\forall m, n \in \mathbb{N})(\exists k \in \mathbb{N})S(m, n, k)$ — істинне;

б) $(\forall m, n, k \in \mathbb{N})(S(m, n, k) \to S(m, n, k))$ — істинне;

в) $(\forall m, n \in \mathbb{N})(\exists k \in \mathbb{N})P(m, n, k)$ — істинне;

г) $(\forall m, n \in \mathbb{N})(P(m, n, k) \to P(m, n, k))$ — істинне;

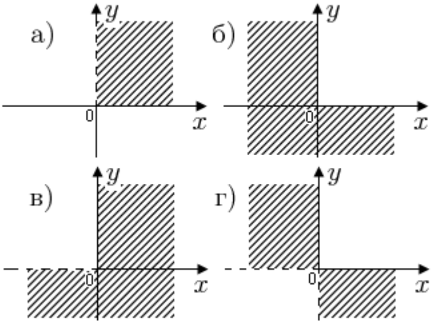
д) $(\forall m, k \in \mathbb{N})(\exists n \in \mathbb{N})S(n, m, k)$ — хибне;

е) $(\forall m, k \in \mathbb{N})(\exists n \in \mathbb{N})P(m, n, k)$ — хибне;

є) $(\forall m, n \in \mathbb{N})(M(m, n) \leftrightarrow (\exists k \in \mathbb{N})S(m, k, n))$ — істинне;

ж) $(\forall m \in \mathbb{N})(K(m) \leftrightarrow (\exists k, l \in \mathbb{N})(M(k, m) \wedge M(l, m) \wedge P(k, l, m)))$ — істинне.

№ 98 (мал. 1.23).



Мал. 1.23.

№ 99.

а) $(\exists x \in X)A(x)$;

б) $(\exists x \in X)A(x) \wedge (\forall y \in X)(A(y) \to A(x) = A(y))$;

в) $(\exists x, y \in X)(x \neq y \wedge A(x) \wedge A(y))$;

г) $(\exists x, y \in X)(x \neq y \wedge A(x) \wedge A(y)) \wedge (\forall z \in X)((z \neq x \wedge z \neq y \wedge \wedge A(z)) \Rightarrow (A(z) = A(x) \vee A(z) \neq A(y)))$.

№ 100.

а) $I_A = I_B = D$;

б) $I_A \cup I_B = D$;

в) $I_{\overline{A}} \cup I_{\overline{B}} = D$; $I_A \cap I_B = \varnothing$;

г) $I_A = I_B = \varnothing$;

д) $I_A = D$, $I_B = \varnothing$;

е) $(I_A \cap I_{\overline{B}}) \cup (I_{\overline{A}} \cap I_B) = D$;

є) $I_B \subset I_A$;

ж) $I_A = I_B = \varnothing$;

з) $I_A \cap I_B = \varnothing$;

и) $I_A = D; I_B = \varnothing$.

Словесно:

а) $A(x), B(x)$ — тотожно істинні предикати;

б) $(\overline{A(x)} \to B(x))$ — тотожно істинний предикат;

в) $(A(x) \to \overline{B(x)})$ — тотожно істинний предикат;

г) $A(x), B(x)$ — тотожно хибні предикати;

д) $A(x)$ — тотожно істинний, а $B(x)$ — тотожно хибний предикати;

е) $(A(x) \to \overline{B(x)}), (\overline{A(x)} \to B(x))$ — тотожно істинні предикати;

є) $B(x) \to A(x)$ — тотожно істинний предикат;

ж) $A(x), B(x)$ — тотожно хибні предикати;

з) $A(x) \to \overline{B(x)}$ — тотожно істинний предикат;

и) $A(x)$ — тотожно істинний, $B(x)$ — тотожно хибний предикати.

№ 101.

а) $(\forall x, z \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{R})(x < y \wedge y < z)$ — хибне;

б) $\overline{(\exists t \in \mathbb{Q})(t^2 - 10 = 0)}$ — істинне;

в) $(\exists t_0 \in \mathbb{Z})(t_0 < 0 \wedge (\forall t \in \mathbb{Z})(t < 0 \wedge t \neq t_0 \to t < t_0))$ — істинне;

г) $(\exists k, l \in \mathbb{Z})(k < l \wedge (\forall m \in \mathbb{Z})(k \leqslant m \wedge m \leqslant l \to k = m \vee m = l))$ — істинне;

д) $(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})(n \neq n_0 \to n < n_0)$ — хибне;

е) $\overline{(\exists x_0, y_0 \in \mathbb{R})(x_0 - 2y_0 = 0 \wedge 3x_0 = 6y_0 + 1)}$ — істинне;

є) $(\forall n \in \mathbb{N})(\exists k \in \mathbb{N})(k < n)$ — хибне.

№ 102.

а) $(\forall x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{R})(x + y = y \vee xy \neq x)$ — хибне.

б) $(\exists x, y \in \mathbb{R})(x^2 + y^2 \leqslant 0)$ — істинне;

в) $(\exists x, y \in \mathbb{R})(x + y = \sqrt{x^2 + y^2})$ — істинне;

г) $(\exists x, y \in \mathbb{R})(x \geqslant y \wedge y \geqslant x)$ — істинне;

д) $(\exists x, y, k \in \mathbb{Z})(\overline{D(m;k)} \wedge \overline{D(n;k)} \wedge D(m+n;k))$ — істинне.

№ 103.

б) Всі три предметні змінні зв'язані;

г) Предметна змінна зв'язана;

д) x, y — зв'язані предметні змінні, z — вільна предметна змінна;

е) u, v, t — зв'язані предметні змінні, причому v — зв'язана в першій частині формули; в другій частині формули v — вільна предметна змінна;

ж) x, z — зв'язані предметні змінні, а y, v — вільні предметні змінні.

№ 104.

Вказівка. Нехай A — множина всіх громадян, що не є службовцями, B — множина всіх службовців, $D(x)$ =„для x дозволено“, $\overline{D(x)}$ =„для x заборонено“. Тоді символьний запис фрази такий: $(\forall x \in A)(\overline{\overline{D(x)}} \to D(x)) \to (\forall x \in B)(\overline{D(x)} \to \overline{D(x)})$. Очевидно, що як обидві частини фрази, так і вся фраза істинні висловлення.

№ 105.

Вказівка. Застосувати логічний закон $\overline{(\exists x \in D)\Phi(x)} \Leftrightarrow (\forall x \in \in D)\overline{\Phi(x)}$, де $\Phi(x)$ =„x — чорна ворона“, D={біла ворона}.

№ 106.

б) — рівносильні; а), в), г) — не рівносильні.

№ 107.

а) $(\forall x)(\Phi(x) \to \Psi(x)) \Rightarrow ((\forall x)\Phi(x) \to (\forall x)\Psi(x))$;

б) кожна з формул пари є наслідком іншої формули цієї пари;

в) $((\exists x)\Phi(x) \to (\exists x)\Psi(x)) \Rightarrow (\exists x)(\Phi(x) \to \Psi(x))$;

г) $((\exists x)\Phi(x) \to (\forall x)\Psi(x)) \Rightarrow (\forall x)(\Phi(x) \to \Psi(x))$.

№ 108.

Вказівка. Застосувати відомі закони логіки предикатів (пункт 4.6).

№ 109

$(\forall n \in \mathbb{N})(n\,\vdots\,2 \wedge n > 4 \to (\exists k, l \in \mathbb{N})(\overline{k\,\vdots\,2} \wedge \overline{l\,\vdots\,2} \wedge S(k) \wedge S(l) \wedge n = k+l))$, де $S(m)$ =„m — просте число“.

№ 110

а) $D = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $I = \{(x; y) | x - y < 0 \wedge x \geqslant 0\}$ (мал. 1.24),

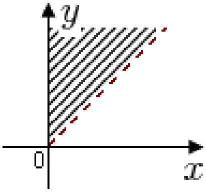
б) $D = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $I = \{(x; y) | (x^2 + y^2 \leqslant 4 \to x^2 + y^2 < 1)\}$ (мал. 1.25),

в) $D = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $I = \{(x; y) | x^2 + y^2 = 1 \vee x < 0\}$ (мал. 1.26),

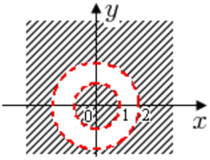
г) $D = \{(x; y) | xy \geqslant 0 \wedge x, y \in \mathbb{R}\}$, $I = \{(x; y) | x^2 + y^2 = 4 \vee \sqrt{xy} > 1\}$ (мал. 1.27),

д) $D = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $I = \{(x; y) | x^2 + y^2 \geqslant 1 \vee xy > 0\}$ (мал. 1.28),

е) $D = \{(x; y) | xy \neq 0 \wedge x, y \in \mathbb{R}\}$, $I = \{(x; y) | x^2 + y^2 \geqslant 4 \leftrightarrow xy < 0\}$ (мал. 1.29).



Мал. 1.24.



Мал. 1.25.

№ 111.

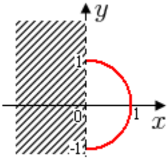
а) $a \geqslant 3$;
б) $a > 3$;
в) $a < 4$;
г) $a < 0$;
д) $0 \leqslant a \leqslant 1$;
е) $a > 4$;
є) $a < -6$;
ж) $a < 0$.

Вказівка. Використати включення $I_A \subset I_B$ для логічного слідування $A(x) \Rightarrow B(x)$ предикатів $A(x), B(x)$, які мають спільну область існування.

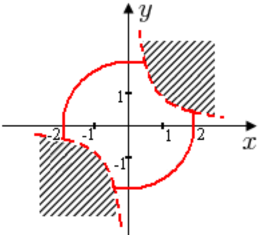
№ 112

Вказівка. Використати висновок про те, що для тотожно хибного предиката $(a(x) \to b(x))$ предикат $a(x)$ тотожно істинний, а предикат $b(x)$ тотожно хибний, якщо ці предикати $a(x)$, $b(x)$ мають спільну область існування. В результаті цього можна показати, що в даній вправі рівняння $A(x)$ несумісне.

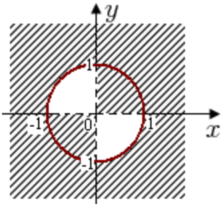
№ 113 „Слід карати винну людину“.



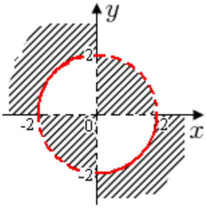
Мал. 1.26.



Мал. 1.27.



Мал. 1.28.



Мал. 1.29.

5 Бінарні відношення

5.1 Найпростіші поняття про бінарні відношення

1. Відомо, що математика з абстрактної точки зору вивчає властивості об'єктів та різноманітні зв'язки між цими об'єктами. І таке вивчення природнє, оскільки кожний об'єкт володіє певними властивостями — це з одного боку, і, з другого боку, ті чи інші об'єкти безперечно знаходяться між собою в певному зв'язку. Разом із тим, їх вивчення важливе не лише для самої математики, для теоретичних досліджень (чи, можливо, лише з чистої цікавості — для задоволення власної допитливості). Адже воно важливе, як правило, і для практичних застосувань. Розглянемо ці **поняття властивостей об'єктів та зв'язків між ними** з більш **загальної** — **теоретико-множинної** — точки зору.

2. Нехай A — довільна множина деяких елементів.

Означення 5.1.1. *Вказати певну властивість, якою володіють деякі елементи цієї множини, — це означає не що інше, як задати таку підмножину* $A_1 \subset A$ *цієї множини* A*, в яку входять в точності всі елементи множини* A *з вказаною властивістю.*

3. Приклади.

1) $\mathbb{N}$ — множина всіх натуральних чисел. Властивість „бути парним натуральним числом“ можна задати підмножиною: $N_2 = \{2n | n \in \mathbb{N}\} = \{2, 4, 6, 8, 10, ..., 2n, ...\} \subset \mathbb{N}$.

2) $K = \{ax^2 + bx + c = 0 | a, b, c \in \mathbb{R} \wedge a \neq 0\}$ — множина всіх квадратних рівнянь з дійсними коефіцієнтами. Властивість „квадратне рівняння з дійсними коефіцієнтами має точно один корінь“ можна задати підмножиною: $K_1 = \{ax^2 + bx + c = 0 | a, b, c \in \mathbb{R} \wedge a \neq 0 \wedge b^2 - 4ac = 0\} \subset K$.

3) A — множина всіх студентів у даній аудиторії. Властивість „мати зріст, який перевищує 180 см“ студентів цієї аудиторії можна задати підмножиною: $A_1 = \{s \in A | 180\text{см} < l(s)\} \subset A$, де $l(s)$ — це позначення зросту студента s.

4. Нехай $A \times B \overset{df}{=} \{(a; b) | a \in A \wedge b \in B\}$ — декартів добуток множин A і B. Як було введено раніше, $A \times B$ — це множина всіх, так званих, впорядкованих пар $(a; b)$ елементів $a \in A$ і $b \in B$, які іноді називають **першою** і відповідно **другою компонентою впорядкованої пари**.

Означення 5.1.2. *Вказати бінарний зв'язок ρ між елементами цих двох множин A і B — це з теоретико-множинної точки зору означає не що інше, як задати підмножину $\rho \subset A \times B$ всіх таких впорядкованих пар $(a; b)$ декартового добутку $A \times B$ множин A і B елементів $a \in A$ і $b \in B$, які перебувають у цьому зв'язку ρ, що іноді позначається як $a\rho b$.*

Отже, $\rho \overset{df}{=} \{(a; b) | a \in A \wedge b \in B \wedge a\rho b\} \subset A \times B$.

Замість слів „бінарний зв'язок“ будемо, як правило, вживати слова „бінарне відношення“ або, іноді, „бінарна відповідність“ (слово „бінарний“ вказує на те, що маємо справу з двома об'єктами; у зв'язку з цим згадайте термін з фізики „біметалічна пластинка“, тобто пластинка, яка утворена з двох металів). Отже, маємо таке, більш коротке означення:

Означення 5.1.3. *Бінарним відношенням між елементами множин A та B називається довільна підмножина декартового добутку $A \times B$ цих множин, тобто символічно маємо: ρ — бінарне відношення між елементами множин A і $B \overset{df}{\Longleftrightarrow} \rho \subset A \times B$.*

Зауваження. Аналогічним чином вводиться поняття тернарного відношення між елементами трьох множин і, в загальному випадку, n-арного відношення між елементами n множин, де $n \in \mathbb{N}$ — довільне натуральне число (навіть коли $n = 1$).

5. У тому випадку, коли множини A і B, на яких розглядається бінарне відношення $\rho \subset A \times B$, співпадають між собою, тобто $A = B$, то таке бінарне відношення називають **однорідним бінарним відношенням** між елементами множини A; у випадку, коли $A \neq B$, бінарне відношення називають **неоднорідним.**

6. Бінарні відношення в загальному випадку будемо позначати малими буквами грецького алфавіту (іноді з індексами): $\rho, \varphi, \psi, \chi, ..., \rho_1, \varphi_1, \psi_1, \chi_1, ...$. Те, що елемент a знаходиться у відношенні ρ з елементом b, ми, як правило, притримуючись теоретико-множинної символіки, будемо позначати $(a; b) \in \rho$ замість позначення $a\rho b$. Правда, остання форма позначення нами буде вживатись тоді, коли для конкретного бінарного відношення існує певний загальноприйнятий символ, наприклад, $a < b$, $a \parallel b$, $a \perp b$, $a \vdots b$ і т.п.

7. Приклади.

1. Відношення „менше $<$“ між елементами множин $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ і $B = \{3, 5\}$ можна записати у вигляді впорядкованих пар чисел $(a; b)$, де $a \in A$, $b \in B$, таким чином:

$$< \; = \{(1; 3), (1; 5), (2; 3), (2; 5), (3; 5), (4; 5)\}.$$

2. Відношення подільності на множині $A = \{1, 2, 3, 4\}$ матиме вигляд такої множини впорядкованих пар:

$$\vdots = \{(1; 1), (2; 1), (2; 2), (3; 1), (3; 3), (4; 1), (4; 2), (4; 4)\} \subset A \times A.$$

3. Відношення $\rho =$ „a в сумі з b є парне число“ на множині $A = \{1, 2, 3, 4\}$ має вигляд такої множини пар:

$$\rho = \{(a; b) | a + b \text{ — парне число}\} =$$
$$= \{(1; 1), (1; 3), (3; 1), (2; 2), (2; 4), (3; 3), (4; 2), (4; 4)\} \subset A \times A.$$

4. Бінарне відношення $\varphi \overset{df}{=} \{(x;y)|y = x^2\} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ між елементами множини $\mathbb{R}$ дійсних чисел задає, говорять, квадратичну функцію $y = x^2$ на множині $\mathbb{R}$.

Зауваження. Відношення $\rho \subset A \times B$, задане предикатом $\Phi(x,y)$, де $x \in A$, $y \in B$, іноді будемо записувати як множину істинності цього предиката у вигляді рівності: $\rho = \{(x;y)|\Phi(x,y)\} \subset$ $\subset A \times B$, а іноді — в скороченій формі, у вигляді рівності: $\rho =$„$\Phi(x,y)$“, де $x \in A$, $y \in B$.

8. Введемо важливі поняття зрізу відношення по елементу і, як узагальнення, зрізу по підмножині.

Нехай $\rho \subset A \times B$ — бінарне відношення між елементами множин A та B, і $a \in A$, $A_1 \subset A$ — довільні елемент та відповідно підмножина множини A.

Означення 5.1.4. *Підмножина* $\rho\langle a\rangle \subset B$ *множини* B *називається зрізом відношення* $\rho \subset A \times B$ *по елементу* $a \in A$ *множини* A, *якщо* $\rho\langle a\rangle$ *містить всі такі елементи* $b \in B$, *що* $(a;b) \in \rho$, *тобто виконується рівність* $\rho\langle a\rangle \overset{df}{=} \{b \in B|(a;b) \in \rho\} \subset B$.

Символічно маємо таке означення: $\rho\langle a\rangle$ — зріз відношення $\rho \subset$ $\subset A \times B$ по елементу $a \in A \overset{df}{\Longleftrightarrow} \rho\langle a\rangle \overset{df}{=} \{b \in B|(a;b) \in \rho\} \subset B$.

Означення 5.1.5. *Підмножина* $\breve{\rho}(A_1) \subset B$ *множини* B *називається зрізом відношення* $\rho \subset A \times B$ *по підмножині* $A_1 \subset A$ *множини* A, *якщо вона є об'єднанням* $\bigcup\limits_{a \in A_1} \rho\langle a\rangle$ *зрізів по всім елементам підмножини* $A_1 \subset A$, *тобто виконується рівність* $\breve{\rho}(A_1) \overset{df}{=} \{b \in$ $\in B|(\exists a \in A_1) b \in \rho\langle a\rangle\} \subset B$.

Отже, символічний запис цього означення матиме вигляд: $\breve{\rho}(A_1) \subset B$ — зріз відношення $\rho \subset A \times B$ по підмножині $(A_1) \subset$ $\subset A \overset{df}{\Longleftrightarrow} \breve{\rho}(A_1) \overset{df}{=} \bigcup\limits_{a \in A_1} \rho\langle a\rangle \overset{df}{=} \{b \in B|(\exists a \in A_1 \subset A)(a;b) \in \rho\} \subset B$.

Очевидно, що зріз $\rho\langle a\rangle$ відношення $\rho \subset A \times B$ по елементу $a \in A$ можна виразити і як зріз по підмножині $\{a\} \subset A$, а саме: $p\langle a\rangle =$ $= \breve{p}(\{a\})$.

9. Введемо також і важливі для подальшого поняття **проекцій бінарного відношення**, які тісно пов'язані з поняттями зрізів цього відношення.

Нехай $\rho \subset A \times B$ — бінарне відношення між елементами множин A і B.

Означення 5.1.6. *Першою проекцією (або областю визначення) цього відношення $\rho \subset A \times B$ називається така підмножина $pr_1\rho \subset A$ множини A, яка містить точно всі перші компоненти впорядкованих пар, які утворюють відношення ρ.*

Отже, символічно маємо: ($pr_1\rho$ — перша проекція (область визначення) відношення $\rho \subset A \times B \overset{df}{\Longleftrightarrow} pr_1\rho \overset{df}{=} \{a \in A | (\exists b \in B)(a; b) \in \in p\} \subset A$.

Означення 5.1.7. *Другою проекцією (або областю значень) цього відношення $\rho \subset A \times B$ називається така підмножина $pr_2\rho \subset \subset B$ множини B, яка містить точно всі другі компоненти впорядкованих пар, які утворюють відношення ρ.*

Отже, символічно маємо: $pr_2\rho$ — друга проекція (область значень) відношення $\rho \subset A \times B \overset{df}{\Longleftrightarrow} pr_2p \overset{df}{=} \{b \in B | (\exists a \in A)(a; b) \in \in p\} \subset B$.

Приклади (див. на сторінці 180).

1. Відношення $\rho_1 \subset A \times B =$ „a менше b“ між елементами множин $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ і $B = \{3, 5\}$. Маємо:

$\rho_1\langle 2\rangle = \{3, 5\}$; $\rho_1\langle 4\rangle = \{5\}$; $\rho_1\langle 5\rangle = \varnothing$;

$\breve{\rho}_1(\{4, 5\}) = \{5\}$; $pr_1\rho_1 = A$; $pr_2\rho_1 = B$.

2) Відношення $\pi \subset A \times A =$ „a ділиться на b“ між елементами множини $A = \{1, 2, 3, 4\}$. Маємо: $\pi\langle 2\rangle = \{1, 2\}$; $\pi\langle 4\rangle = \{1, 2, 4\}$; $\breve{\pi}(\{2, 3\}) = \{1, 2, 3\}$; $pr_1\pi = pr_2\pi = \{1, 2, 3, 4\}$.

3) Відношення $\varphi = \{(x; y) | y = x^2\} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ між елементами множини $\mathbb{R}$ дійсних чисел, яке задає квадратичну функцію $y = x^2$ на $\mathbb{R}$. Маємо: $\varphi\langle 5\rangle = \{25\}$; $\varphi\langle 1\rangle = \varphi\langle -1\rangle = \{1\}$; $\breve{\varphi}(\{2, 3, -3\}) = = \{4, 9\}$; $pr_1\varphi = \mathbb{R}$; $pr_2\varphi = [0, +\infty) \subset \mathbb{R}$.

10. Завершуючи розгляд питання про введення найпростіших понять про бінарні відношення, зазначимо наступне. Як відмічалося раніше, група французьких математиків Бурбакі намагалася всю математику, всі її розділи викласти з єдиної точки зору, виходячи з основ теорії множин, тобто базуючись на теоретико-множинній основі. І, безперечно, це їм в значній мірі вдалося. Разом із тим слід відмітити **величезну заслугу Бурбакі** і в тому, що, як відмічено в пунктах 1 — 5, такі здавалося б далекі поняття від математики, як властивості об'єктів та зв'язки між ними, теж вдається викласти з теоретико-множинної точки зору — у вигляді певних множин. Завдяки цьому вивчення властивостей об'єктів та зв'язків між ними можна звести до вивчення певних множин, які можна, говорять, наочно побачити, проглянути, „прощупати“ поелементно. Адже множини — це теж певні об'єкти, а не щось ефемерне, коли вживаємо такі важливі терміни, як „властивості“, „зв'язки“!

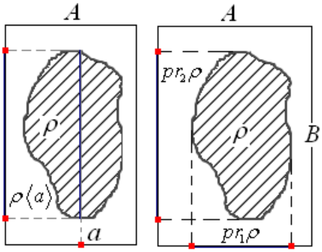
5.2 Задання та зображення бінарних відношень

1. Оскільки бінарні відношення між елементами заданих множин A, B нами трактуються як підмножини декартового добутку $A \times B$ цих множин, то способи задання і зображення цих відношень можна вважати аналогічними тим способам, які вводилися для множин.

Так, у **випадку скінченних множин** A, B відповідні бінарні відношення як підмножини $\rho \subset A \times B$ декартового добутку множин A і B **можна задавати переліком всіх тих впорядкованих пар** елементів $(a; b)$, де $a \in A$, $b \in B$, що входять у відповідне відношення $\rho \subset A \times B$ (приклади задання таких відношень наведені у попередньому параграфі в пунктах 7, 9).

2. Схематично бінарні відношення $\rho \subset A \times B$ іноді зображають у вигляді частин прямокутника, сторони якого відповідають множинам A, B, а сам прямокутник є зображенням декартового добутку цих множин. Таке зображення дещо нагадує **діаграму Венна-Ейлера** для зображення множин. На такому малюнку (див. малюнок 1.30) можна зобразити зрізи бінарного відношення, першу і другу проекції відношення. З малюнка якраз і можна зрозуміти назви „зріз“, „проекція“ тощо.

3. Бінарне відношення $\rho \subset A \times B$ між елементами скінченних множин $A = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$ і $B = \{b_1, b_2, ..., b_m\}$ можна подати і як



Мал. 1.30.

матрицю-таблицю з n рядків і m стовпців.

Записуючи на перетині i-того рядка та j-того стовпця одиницю 1, яка означає T (істину), якщо $(a_i; b_j) \in \rho$, і нуль 0, який означає F (хибу), якщо $(a_i; b_j) \notin \rho$. Так, **наприклад**, відношення $\rho_1 =$„a менше b“ між елементами множин $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ і $B = \{3, 5\}$ (див. пункти 7, 9 параграфу 5.1) представиться матрицею (див. малюнок 1.31).

4. Іноді **бінарне відношення** $\rho \subset A \times B$ між елементами скінченних множин A і B **задають у вигляді таблиці**, в одному рядку якої перелічують всі елементи множини A, а в другому її рядку — відповідні цим елементам зрізи даного відношення по кожному з цих елементів. Так, наприклад, для того ж самого відноше-

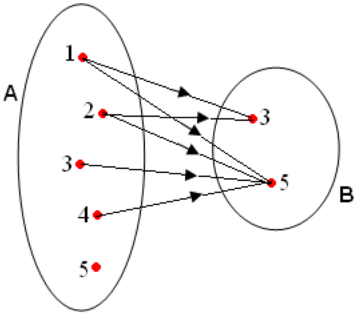
$$\begin{array}{c c}
 & \begin{array}{cc} 3 & 5 \end{array} \\
\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{array}$$

Мал. 1.31.

ння $\rho_1 =$„a менше b“ між елементами множин $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ і $B = \{3, 5\}$, розглянутого вище, табличне задання цього відношення матиме такий вигляд:

a_i	1	2	3	4	5
$\rho_1\langle a_i\rangle$	$\{3, 5\}$	$\{3, 5\}$	$\{5\}$	$\{5\}$	$\varnothing$

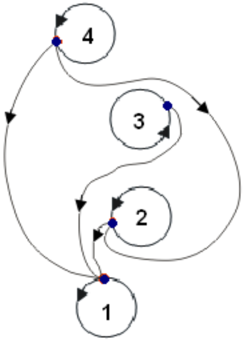
5. Бінарне відношення між елементами скінченних множин **можна зобразити графічно у вигляді двох областей**, що містять точки, які відповідають елементам цих множин і з'єднуються напрямленими стрілками, що відповідають впорядкованим парам елементів множин, які належать цьому відношенню (див. малюнок 1.32, який відповідає тому ж самому відношенню $\rho_1 =$„a менше b“ між елементами множин $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ і $B\{3, 5\}$, розглянутих вище).



Мал. 1.32.

6. Однорідне бінарне відношення $p \subset A \times A$ між елементами скінченної множини іноді зручно **зобразити так званим графом** — фігурою, що складається з кількох точок — **вершин графа** — та напрямлених дуг — **ребер графа**, які з'єднують деякі вершини та вказують на ті пари елементів, з яких складається бінарне відношення ρ. Якщо пара $(a; a)$ належить відношенню, то відповідна дуга є петлею. Так, **наприклад**, для відношення подільності $\alpha =$„a ділиться на b“, заданого на множині $A = \{1, 2, 3, 4\}$ (див. пункт

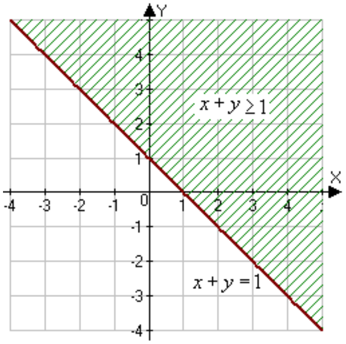
7 параграфа 5.1), відповідне зображення у вигляді графа матиме такий вигляд, як на малюнку 1.33



Мал. 1.33.

7. Якщо бінарні відношення задаються на числових множинах, то відповідні їм зображення здійснюються на координатній площині Oxy і називаються **графіками**. Якщо ρ — це одне із таких відношень, то відповідний графік G_ρ — це множина всіх таких точок $M(x;y)$, що $(x;y) \in \rho$. Так, наприклад, для однорідного бінарного відношення $p = \{(x;y)|x+y \geqslant 1\} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, заданого на множині $\mathbb{R}$ дійсних чисел, відповідним графіком G_ρ, легко бачити, є зображення півплощини, утвореної прямою $x+y=1$, яка не містить початок координат координатної площини Oxy (див. малюнок 1.34).

8. Якщо бінарне відношення $\rho \subset A \times B$ можна задати переліком всіх своїх впорядкованих пар елементів, то це можливо в тому випадку, коли базові множини A і B цього відношення скінченні. В противному випадку **бінарне відношення задають певною характеристичною властивістю, говорять, певним правилом**, що виражається деякою формулою або словесно і вказує, які саме пари $(a;b)$ елементів $a \in A$ і $b \in B$ утворюють вказане бінарне відношення $\rho \subset A \times B$. **Найчастіше в ролі такої характеристичної властивості (правила) виступає висловлювальна форма, певний двомісний предикат $\Phi(x,y)$ з базисними**



Мал. 1.34.

множинами A **і** B**, областю істинності** I_Φ **якого якраз і є це бінарне відношення, тобто:** $\rho = I_\Phi$ **або, що те ж саме,** $\rho = \{(a;b)|\Phi(a,b)\} = \{(a;b)|p(\Phi(a,b)) = T\}$**.** Зрозуміло, що одне і те ж саме бінарне відношення можна, як ми знаємо з попередньої теми, виражати різними предикатами, які рівносильні між собою.

Наприклад, розглянуте вище бінарне відношення $\rho = \{(x;y)|x+y \geqslant 1\} \subset \mathbb{R}\times\mathbb{R}$ задано двомісним предикатом $\Phi(x,y) =$„$x+y \geqslant 1$“, який можна замінити іншим довільним рівносильним предикатом (наприклад, предикатом $\psi(x,y) =$„$x^2 + y^2 + 1 \leqslant x^3 + y^3 + (1+xy)(x+y)$“, де $x, y \in \mathbb{R}$).

5.3 Операції над бінарними відношеннями

1. Оскільки бінарні відношення ми розглядаємо як підмножини декартового добутку двох базисних множин, то для бінарних відношень можна використовувати всі ті поняття, операції, які вводилися для підмножин заданої множини. Тому, наприклад, відношення рівності, включення та теоретико-множинні операції для бінарних відношень вводяться аналогічно. Наведемо для них відповідні означення.

2. Нехай $\rho, \varphi \subset A\times B$ — бінарні відношення між елементами множин A і B.

Означення 5.3.1. *Відношення ρ і φ називаються рівними між собою, якщо вони складаються з одних і тих самих впорядкованих пар $(a;b)$ елементів $a \in A$ і $b \in B$, тобто:*

$$\rho = \varphi \overset{df}{\Longleftrightarrow} (\forall a \in A, b \in B)((a;b) \in \rho \leftrightarrow (a;b) \in \varphi).$$

Означення 5.3.2. *Відношення ρ включається у відношення φ, тобто $\rho \subset \varphi$, якщо довільна пара $(a;b)$ елементів $a \in A$, $b \in B$, яка належить ρ, належить і φ, тобто*

$$\rho \subset \varphi \overset{df}{\Longleftrightarrow} (\forall a \in A, b \in B)((a;b) \in \rho \rightarrow (a;b) \in \varphi).$$

Очевидна така логічна еквівалентність, яка зв'язує рівність відношень з їх включенням: $\rho = \varphi \Leftrightarrow (\rho \subset \varphi \wedge \varphi \subset \rho)$.

Означення 5.3.3. *Перетином бінарних відношень ρ і φ називається таке бінарне відношення $\rho \cap \varphi$, кожна впорядкована пара (a; b) якого належить відношенням ρ, φ одночасно, тобто*

$$\rho \cap \varphi \overset{df}{=} \{(a;b)|(a;b) \in \rho \wedge (a;b) \in \varphi\} \subset A \times B.$$

Означення 5.3.4. *Об'єднанням бінарних відношень ρ і φ називається таке бінарне відношення $\rho \cup \varphi$, кожна впорядкована пара якого належить хоча б одному з відношень ρ, φ, тобто*

$$\rho \cup \varphi \overset{df}{=} \{(a;b)|(a;b) \in \rho \vee (a;b) \in \varphi\} \subset A \times B.$$

Означення 5.3.5. *Доповненням бінарного відношення ρ називається таке бінарне відношення $\overline{\rho}$, кожна впорядкована пара $(a;b) \in A \times B$ якого не належить відношенню ρ, тобто:*

$$\overline{\rho} \overset{df}{=} \{(a;b)|(a;b) \in A \times B \wedge (a;b) \notin \rho\} \subset A \times B.$$

Через ці три основні теоретико-множинні операції перетину, об'єднання і доповнення виражаються операції віднімання і симетричного віднімання бінарних відношень, а саме:

Означення 5.3.6. *Віднімання:* $\rho \setminus \varphi \overset{df}{=} \{(a;b)|(a;b) \in \rho \wedge (a;b) \notin$ $\notin \varphi\} = \rho \cap \overline{\varphi} \subset A \times B$ *— різниця бінарних відношень ρ і φ.*

Означення 5.3.7. *Симетричне віднімання:* $\rho - \varphi \overset{df}{=} (\rho \cup \varphi) \setminus (\rho \cap \varphi) \overset{df}{=} (\rho \setminus \varphi) \cup (\varphi \setminus \rho)$ *— симетрична різниця бінарних відношень* ρ *і* φ.

3. Приклад. На множині $A = \{1, 2, 3, 4\}$ задані бінарні відношення: $\rho =$„a<b“$= \{(1;2), (1;3), (1;4), (2;3), (2;4), (3;4)\}$ і $\varphi =$„a⋮b“$=\{(1;1), (2;1), (2;2), (3;1), (3;3), (4;1), (4;2), (4;4)\}$. Знайти бінарні відношення: $\rho \cap \varphi$, $\rho \cup \varphi$, $\rho \setminus \varphi$, $\varphi \setminus \rho$, $\rho - \varphi$.

Розв'язання. Використавши введені вище означення теоретико-множинних операцій над бінарними відношеннями, отримаємо:

$\rho \cap \varphi = \varnothing$;

$\rho \cup \varphi = \{(1;2), (1;3), (1;4), (2;3), (2;4), (3;4), (1;1), (2;1), (2;2), (3;1), (3;3), (4;1), (4;2), (4;4)\}$;

$\rho \setminus \varphi = \rho$;

$\varphi \setminus \rho = \varphi$;

$\rho - \varphi = \rho \cup \varphi$.

4. Безперечно, що для введених вище рівностей та включень і теоретико-множинних операцій для бінарних відношень як підмножин деякого декартового добутку множин аналогічно мають місце всі ті властивості, які мали місце і для рівностей та включень і відповідних операцій над множинами.

5. Поряд зі згаданими вище теоретико-множинними операціями над бінарними відношеннями вводяться і кілька нових, специфічних для бінарних відношень операцій, які можуть змінювати внутрішню структуру впорядкованих пар елементів, що утворюють бінарні відношення. Серед таких нових операцій над бінарними відношеннями розглянемо наступні дві операції:

а) унарна операція — **обертання** (іноді, називають **інверсія**);

б) бінарна операція — **композиція** (іноді говорять **суперпозиція**, множення, утворення складеного чи складного відношення).

Означення 5.3.8. *Обертанням бінарного відношення (інверсією)* $\rho \subset A \times B$ *називається утворення такого відношення* $\rho^{-1} \subset B \times A$, *яке називається оберненим до* ρ *та утворено з усіх* *впорядкованих пар, друга компонента яких знаходиться у відношенні з її першою компонентою, тобто:* $\rho^{-1} \subset B \times A$ *— обернене відношення до* $\rho \subset A \times B \overset{df}{\Longleftrightarrow} \rho^{-1} = \{(b;a)|(a;b) \in p\}$.

Означення 5.3.9. *Композицією бінарних відношень (суперпозицією)* $\rho \subset A \times B$ *і* $\varphi \subset B \times C$ *називається утворення такого відношення* $\varphi \circ \rho \subset A \times C$*, яке називається композицією або добутком цих відношень* ρ *і* φ *(застережемо: порядок переліку цих відношень важливий!), що містить в точності такі пари* $(a;c) \in A \times C$*, для кожної з яких існує* $b \in B$*, для якого* $(a;b) \in \rho$ *і* $(b;c) \in \varphi$*, тобто:* $\varphi \circ \rho \subset A \times C$ *— композиція відношень* $\rho \subset A \times B$ *і* $\varphi \subset B \times C \overset{df}{\Longleftrightarrow} \varphi \circ \rho = \{(a;c)|(\exists b \in B)((a;b) \in \rho \wedge (b;c) \in \varphi)\}$.

6. Приклад. Нехай $\rho = \{(1;2),(2;3),(2;2),(1;5),(3;4)\} \subset A \times B$, $\varphi = \{(4;3),(3;5),(2;6)\} \subset B \times C$, де $A = \{1,2,3,4\}$; $B = \{2,3,4,5\}$; $C = \{3,4,5,6\}$ Знайти: $\rho^{-1}, \varphi \circ \rho$.

Розв'язання. Використавши означення операцій обертання та множення бінарних відношень, отримаємо:

$$\rho^{-1} = \{(2;1),(3;2),(2;2),(5;1),(4;3)\} \subset B \times A;$$

$$\varphi \circ \rho = \{(1;6),(2;5),(2;6),(3;3)\} \subset A \times C.$$

7. Зауваження 1. Якщо $\alpha \subset A \times B$ — бінарне відношення між елементами множин A та B, і $A \subset A_1$, $B \subset B_1$, то очевидно, що $\alpha \subset A_1 \times B_1$. Тому α можна вважати і бінарним відношенням між елементами множин A_1 та B_1 . Звідси слідує, що можна розглядати композицію для довільних бінарних відношень $\rho \subset A \times B$ і $\varphi \subset$ $\subset C \times D$, вважаючи, що $\varphi \circ \rho \subset A \times D$ — це композиція відношень: $\rho \subset A \times (B \cup C)$ і $\varphi \subset (B \cup C) \times D$. У зв'язку з таким зауваженням взагалі довільне бінарне відношення $\alpha \subset A \times B$ між елементами множин A та B можна вважати однорідним бінарним відношенням $\alpha \subset M \times M$ між елементами множини $M = A \cup B$, оскільки маємо очевидне включення $A \times B \subset (A \cup B) \times (A \cup B)$. Використавши це зауваження, можна вважати, що при розв'язуванні попереднього прикладу маємо, такі бінарні відношення між елементами множини $M = A \cup B \cup C = \{1,2,3,4,5,6\}$:

$$\rho = \{(1;2),(2;3),(2;2),(1;5),(3;4)\} \subset M \times M;$$

$$\varphi = \{(4;3),(3;5),(2;6)\} \subset M \times M;$$

$$\rho^{-1} = \{(2;1),(3;2),(2;2),(5;1),(4;3)\} \subset M \times M;$$

$$\varphi \circ \rho = \{(1;6),(2;5),(2;6),(3;3)\} \subset M \times M.$$

Використавши означення композиції бінарних відношень, отримаємо також: $\rho \circ \varphi = \{(4;4)\}$, що справді підтверджує той факт, який відмічений в означенні: порядок переліку відношень в композиції важливий, оскільки переконуємося на цьому прикладі про те, що $\varphi \circ \rho \neq \rho \circ \varphi$.

8. Зауваження 2. Якщо бінарні відношення розглядаються на скінченних множинах, то, як відомо з попереднього, такі бінарні відношення можна подати відповідними логічними матрицями з істинносними нулями та одиницями. Виявляється, що обертання бінарного відношення зводиться до **транспонування** відповідної цьому відношенню матриці, а операція композиції відношень зводиться до **логічного множення** відповідних цим відношенням матриць (про операції над матрицями можна познайомитися самостійно з посібників з лінійної алгебри, яку студенти починають вивчати з наступного семестру).

9. Введені вище операції над бінарними відношеннями володіють цілим рядом властивостей. Перелічимо деякі з них, вважаючи, в цілях спрощення відповідного запису та міркувань, що відношення розглядаються між елементами деякої множини, тобто однорідні відношення. Такий розгляд завжди можна допустити в силу зробленого вище зауваження 1.

Нехай ρ, ρ_1, ρ_2, φ, φ_1, φ_2, $\psi \subset M \times M$ — довільні однорідні бінарні відношення між елементами множини M. Мають місце такі співвідношення у вигляді рівностей та логічних еквівалентностей:

$$(\rho^{-1})^{-1} = \rho; \tag{5.3.1}$$

$$\rho^{-1} \subset \varphi^{-1} \Leftrightarrow \rho \subset \varphi; \tag{5.3.2}$$

$$\rho^{-1} = \varphi^{-1} \Leftrightarrow \rho = \varphi; \tag{5.3.3}$$

$$(\rho \cup \varphi)^{-1} = \rho^{-1} \cup \varphi^{-1}; \tag{5.3.4}$$

$$(\rho \cap \varphi)^{-1} = \rho^{-1} \cap \varphi^{-1}; \tag{5.3.5}$$

$$(\overline{\rho})^{-1} = \overline{(\rho^{-1})}; \tag{5.3.6}$$

$$\varphi \circ \rho \neq \rho \circ \varphi; \tag{5.3.7}$$

$$(\varphi \circ \rho)^{-1} = \rho^{-1} \circ \varphi^{-1}; \tag{5.3.8}$$

$$\psi \circ (\varphi \circ \rho) = (\psi \circ \varphi) \circ \rho. \tag{5.3.9}$$

Доведення співвідношень (5.3.1) — (5.3.9) випливає з відповідних означень операцій та відмічених раніше властивостей відповідних операцій над множинами та предикатами. **Доведемо,** наприклад, співвідношення (5.3.2) і (5.3.9).

Для доведення співвідношення (5.3.2) маємо: $\rho^{-1} \subset \varphi^{-1} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow (\forall a, b \in M)((a;b) \in \rho^{-1} \to (a;b) \in \varphi^{-1}) \Leftrightarrow (\forall a, b \in M)((b;a) \in$ $\in \rho \to (b;a) \in \varphi) \Leftrightarrow \rho \subset \varphi$. Отриманий ланцюжок логічних еквівалентностей показує виконання співвідношення (5.3.2). Для **доведення** рівності (5.3.9) маємо: $\psi \circ (\varphi \circ \rho) = \{(a;d) | (\exists c \in M)((a;c) \in$ $\in \varphi \circ \rho \wedge (c;d) \in \psi)\} = \{(a;d) | (\exists c \in M)(((\exists b \in M)((a;b) \in \rho \wedge (b;c) \in$ $\in \varphi) \wedge (c;d) \in \psi))\} = \{(a;d) | (\exists c \in M)(\exists b \in M)((a;b) \in \rho \wedge (b;c) \in$ $\in \varphi \wedge (c;d) \in \psi)\} = \{(a;d) | (\exists b \in M)(\exists c \in M)(((a;b) \in \rho \wedge (b;c) \in$ $\in \varphi) \wedge (c;d) \in \psi)\} = \{(a;d) | (\exists b \in M)(\exists c \in M)((a;b) \in \rho \wedge ((b;c) \in$ $\in \varphi \wedge (c;d) \in \psi))\} = \{(a;d) | (\exists b \in M)((a;b) \in \rho \wedge (\exists c \in M)((b;c) \in$ $\in \varphi \wedge (c;d) \in \psi))\} = \{(a;d) | (\exists b \in M)((a;b) \in \rho \wedge (b;d) \in$ $\in \psi \circ \varphi)\} = (\psi \circ \varphi) \circ \rho$, звідки і випливає рівність (5.3.9) ■

10. Відмітимо далі деякі властивості зрізів і проекцій відношень та взаємозв'язки їх з введеними операціями. При цьому будемо притримуватися тих же домовленостей про бінарні відношення, які були відмічені вище.

Нехай $\rho, \rho_1, \rho_2, \varphi, \varphi_1, \varphi_2 \subset M \times M$ — довільні бінарні відношення між елементами множини M; $A_1, A_2 \subset M$ — довільні підмножини цієї множини і $a, b \in M$ — довільні її елементи. Мають місце такі співвідношення, які подамо у вигляді рівностей, включень та логічних еквівалентностей:

$$\rho = \bigcup_{a \in M} (\{a\} \times \rho\langle a \rangle); \tag{5.3.10}$$

$$\rho \subset \varphi \Leftrightarrow (\forall a \in M)(\rho\langle a \rangle \subset \varphi\langle a \rangle); \tag{5.3.11}$$

$$\rho = \varphi \Leftrightarrow (\forall a \in M)(\rho\langle a \rangle = \varphi\langle a \rangle); \tag{5.3.12}$$

$$\breve{\rho}(A_1 \cup A_2) = \breve{\rho}(A_1) \cup \breve{\rho}(A_2); \tag{5.3.13}$$

$$\breve{\rho}(A_1 \cap A_2) \subset \breve{\rho}(A_1) \cap \breve{\rho}(A_2); \tag{5.3.14}$$

$$pr_1(\rho) = \breve{\rho^{-1}}(M) = \bigcup_{b \in M} (\rho^{-1}\langle b \rangle); \tag{5.3.15}$$

$$pr_2(\rho) = \breve{\rho}(M) = \bigcup_{a \in M} (\rho\langle a \rangle); \tag{5.3.16}$$

$$pr_1(\rho^{-1}) = pr_2(\rho) = \bigcup_{a \in M} (\rho\langle a \rangle); \tag{5.3.17}$$

$$pr_2(\rho^{-1}) = pr_1(\rho) = \bigcup_{b \in M} (\rho^{-1}\langle b \rangle); \tag{5.3.18}$$

$$\rho = \varnothing \Leftrightarrow pr_1\rho = \varnothing \Leftrightarrow pr_2\rho = \varnothing; \tag{5.3.19}$$

$$\breve{\rho}(\varnothing) = \varnothing; \tag{5.3.20}$$

$$\rho\langle a \rangle = \varnothing \Leftrightarrow a \notin pr_1\rho; \tag{5.3.21}$$

$$(\varphi \circ \rho)\langle a \rangle = \breve{\varphi}(\rho\langle a \rangle); \tag{5.3.22}$$

$$\breve{\overline{(\varphi \circ \rho)}}(A_1) = \breve{\varphi}(\breve{\rho}(A_1)); \tag{5.3.23}$$

$$pr_1(\varphi \circ \rho) = \rho^{\breve{-}1}(pr_1(\varphi)); \tag{5.3.24}$$

$$pr_2(\varphi \circ \rho) = \breve{\varphi}(pr_2\rho); \tag{5.3.25}$$

$$\varphi \circ \rho = \varnothing \Leftrightarrow (pr_2\rho) \cap (pr_1\varphi) = \varnothing; \tag{5.3.26}$$

$$(\rho \cup \varphi)\langle a \rangle = \rho\langle a \rangle \cup \varphi\langle a \rangle; \tag{5.3.27}$$

$$(\rho \cap \varphi)\langle a \rangle \subset \rho\langle a \rangle \cap \varphi\langle a \rangle; \tag{5.3.28}$$

$$\overline{(\rho \mathbin{\breve{\cup}} \varphi)}(A_1) = \breve{\rho}(A_1) \cup \breve{\varphi}(A_1); \tag{5.3.29}$$

$$\overline{(\rho \mathbin{\breve{\cap}} \varphi)}(A_1) \subset \breve{\rho}(A_1) \cap \breve{\varphi}(A_1); \tag{5.3.30}$$

$$(\varphi_1 \cup \varphi_2) \circ \rho = (\varphi_1 \circ \rho) \cup (\varphi_2 \circ \rho); \tag{5.3.31}$$

$$\varphi \circ (\rho_1 \cup \rho_2) = (\varphi \circ \rho_1) \cup (\varphi \circ \rho_2); \tag{5.3.32}$$

$$(\varphi_1 \cap \varphi_2) \circ \rho \subset (\varphi_1 \circ \rho) \cap (\varphi_2 \circ \rho); \tag{5.3.33}$$

$$\varphi \circ (\rho_1 \cap \rho_2) \subset (\varphi \circ \rho_1) \cap (\varphi \circ \rho_2). \tag{5.3.34}$$

Доведення співвідношень (5.3.10) — (5.3.34) проводиться аналогічно доведенню співвідношень (5.3.1) — (5.3.9).

Доведемо, наприклад, співвідношення (5.3.17) і (5.3.30). Маємо такий ланцюжок рівностей: $pr_1(\rho^{-1}) = \{b|(\exists a \in M)(b;a) \in p^{-1}\} = \{b|(\exists a \in M)(a;b) \in p\} = pr_2\rho = \{b|(\exists a \in M)b \in p\langle a \rangle\} = \bigcup\limits_{a \in M} (\rho\langle a \rangle)$, з якого і слідують рівності (5.3.17).

Для доведення включення (5.3.30) використаємо логічний закон: $(\exists x)(\Phi(x) \wedge \Psi(x)) \Rightarrow ((\exists x)\Phi(x) \wedge (\exists x)\Psi(x))$.

В результаті отримаємо такий ланцюжок логічних еквівалентностей та слідування для довільного елемента $b \in M$: $b \in$

$\overline{\rho \breve{\cap} \varphi}(A_1) \Leftrightarrow (\exists a \in A_1)((a;b) \in \rho \cap \varphi) \Leftrightarrow (\exists a \in A_1)((a;b) \in \in \rho \wedge (a;b) \in \varphi) \Rightarrow ((\exists a \in A_1)(a;b) \in \rho \wedge (\exists a \in A_1)(a;b) \in \varphi) \Leftrightarrow (b \in \in \breve{\rho}(A_1) \cap \breve{\varphi}(A_1))$. З отриманого ланцюжка отримаємо співвідношення $(\forall b \in M)(b \in \overline{\rho \breve{\cap} \varphi}(A_1) \to b \in (\rho(A_1) \cap \varphi(A_1)))$, що і дає включення (5.3.30), яке потрібно було довести ■

5.4 Деякі властивості однорідних бінарних відношень

1. Оскільки, як було відмічено вище, довільне бінарне відношення можна розглядати як однорідне відношення між елементами деякої множини, то будемо надалі при дослідженні властивостей відношень мати на увазі лише однорідні бінарні відношення.

Безперечно, що в залежності від того, які саме елементи в упорядкованих парах, що складають дане відношення, зв'язані між собою, ми матимемо справу з різноманітними бінарними відношеннями, кожне з яких буде характеризуватися тією чи іншою властивістю. Розглянемо деякі із загальних властивостей відношень, що зустрічаються на практиці та мають ті чи інші застосування.

2. Нехай $\rho \subset M \times M$ — довільне однорідне бінарне відношення між елементами множини M. Якщо це відношення не містить жодної впорядкованої пари $(a;b)$ елементів $a, b \in M$ з множини M, то назвемо його **порожнім** і позначимо $\varnothing$. Якщо ж ρ містить всі такі пари $(a;b)$ елементів $a, b \in M$ з цієї множини M, то назвемо його **універсальним**.

Очевидно, що означення універсального та порожнього відношень можна подати у такому вигляді:

Означення 5.4.1. $\rho \subset M \times M$ *— універсальне відношення на множині* $M \overset{df}{\Longleftrightarrow} \rho = M \times M$.

Означення 5.4.2. $\rho \subset M \times M$ *— порожнє відношення на множині* $M \overset{df}{\Longleftrightarrow} \rho = \varnothing$.

На елементарному рівні, тобто на мові елементів, ці означення матимуть відповідно такий вигляд:

Означення 5.4.3. *$\rho \subset M \times M$ — універсальне відношення на множині $M \overset{df}{\iff} (\forall a, b \in M)(a; b) \in \rho$.*

Означення 5.4.4. *$\rho \subset M \times M$ — порожнє відношення на множині $M \overset{df}{\iff} (\forall a, b \in M)(a; b) \notin \rho$.*

Очевидно, що для довільного відношення $\rho \subset M \times M$ виконуються включення: $\varnothing \subset \rho \subset M \times M$.

3. Зауваження. Однією із найперших природних задач, яка виникає при розгляді бінарних відношень, є задача „Підрахувати кількість k_n всіх однорідних бінарних відношень на множині M_n, якщо $n = |M_n|$ — це кількість всіх елементів цієї множини $M_n = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$“. Не вдаючись в подробиці міркувань при розв'язуванні цієї задачі (виявляється, що її розв'язування досить просте; подумайте над ним самостійно), дамо лише відповідь до цієї задачі: $k_n = 2^{n \cdot n} = 2^{n^2}$. Навіть, якщо візьмемо $n = 10$, кількість k_{10} всіх однорідних бінарних відношень на множині M_{10} є достатньо велике число: $k_{10} = 2^{10^2} = 2^{100}$. А це вказує на те, що кількість різноманітних відношень, кожне з яких має свої власні властивості, досить значна. І тому **є велике поле діяльності для їх вивчення, дослідження та подальшого їх застосування.**

4. Далі, у вигляді означень, відмітимо деякі види бінарних відношень, які володіють тими чи іншими притаманними їм властивостями, відповідні їм назви та проілюструємо на діаграмах та конкретних прикладах.

Нехай $\rho \subset M \times M$ — довільне однорідне бінарне відношення між елементами множини M.

Означення 5.4.5. *$\rho \subset M \times M$ називається повним (тобто, скрізь визначеним) бінарним відношенням на множині M, якщо його перша проекція (тобто область визначення) співпадає з усією множиною M, тобто виконується рівність $pr_1 \rho = M$, яка на елементарному рівні, легко бачити, має вигляд співвідношення:*

$$(\forall a \in M)(\exists b \in M)(a; b) \in \rho.$$

Отже, маємо: $\rho \subset M \times M$ — **повне (скрізь визначене) бінар-**

не відношення на множині $M \overset{df}{\iff} pr_1\rho = M \Leftrightarrow (\forall a \in M)(\exists b \in \in M)(a;b) \in \rho$.

Означення 5.4.6. *$\rho \subset M \times M$ називається обернено повним (сюр'єктивним) бінарним відношенням на множині M, якщо його друга проекція (тобто область значень) співпадає з усією множиною M, тобто виконується рівність $pr_2\rho = M$, яка на елементарному рівні, легко бачити, має вигляд співвідношення:*

$$(\forall b \in M)(\exists a \in M)(a;b) \in \rho.$$

Отже, маємо: $\rho \subset M \times M$ — **обернено повне (сюр'єктивне) бінарне відношення на множині** $M \overset{df}{\iff} pr_2\rho = M \Leftrightarrow (\forall b \in \in M)(\exists a \in M)((a;b) \in \rho)$.

Означення 5.4.7. *$\rho \subset M \times M$ називається ефективним бінарним відношенням на множині M, якщо його об'єднана проекція $pr\rho \overset{df}{=} pr_1\rho \cup pr_2\rho$ співпадає з усією множиною M, тобто виконується рівність $pr\rho = M$, яка на елементарному рівні, легко бачити, має вигляд співвідношення*

$$(\forall a \in M)(\exists b \in M)((a;b) \in \rho \vee (b;a) \in \rho).$$

Отже, маємо: $\rho \subset M \times M$ — **ефективне бінарне відношення на множині** $M \overset{df}{\iff} pr\rho \overset{df}{=} pr_1\rho \cup pr_2\rho = M \Leftrightarrow (\forall a \in M)(\exists b \in \in M)((a;b) \in \rho \vee (b;a) \in \rho)$.

Означення 5.4.8. *$\rho \subset M \times M$ називається повним сюр'єктивним бінарним відношенням на множині M, якщо його обидві проекції співпадають з усією множиною M, тобто виконуються рівності $pr_1\rho = pr_2\rho = M$, які на елементарному рівні мають вигляд такого співвідношення:*

$$(\forall a \in M)(\exists b \in M)(a,b) \in \rho \wedge (\forall b \in M)(\exists a \in M)(a;b) \in \rho.$$

5. Легко бачити, що **всі повні відношення, всі обернено повні відношення, всі повні сюр'єктивні відношення є ефективними бінарними відношеннями на заданій множині**. Можна також показати, що мають місце такі логічні еквівалентності:

а) $\rho \subset M \times M$ — повне відношення $\Leftrightarrow \rho^{-1} \subset M \times M$ — обернено повне відношення;

б) $\rho \subset M \times M$ — обернено повне відношення $\Leftrightarrow \rho^{-1} \subset M \times M$ — повне відношення;

в) $\rho \subset M \times M$ — ефективне відношення $\Leftrightarrow \rho^{-1} \subset M \times M$ — ефективне відношення;

г) $\rho \subset M \times M$ — ефективне відношення $\Leftrightarrow \rho \cup \rho^{-1} \subset M \times M$ — повне сюр'єктивне відношення.

Очевидно, що довільне бінарне відношення $\rho \subset M \times M$ ефективне на своїй об'єднаній проекції $pr\rho \subset M$.

Очевидно, що універсальне бінарне відношення $M \times M$ є повним сюр'єктивним відношенням.

6. На діаграмах зображення повного, обернено повного, ефективного та повного сюр'єктивного бінарних відношень матимуть такий вигляд як на малюнку 1.35.

7. Приклади.

1. Відношення „$m < n$“ на множині $\mathbb{N}$ натуральних чисел повне, але не обернено повне.

2. Відношення „$m < n$“на множині $\mathbb{Z}$ цілих чисел повне сюр'єктивне.

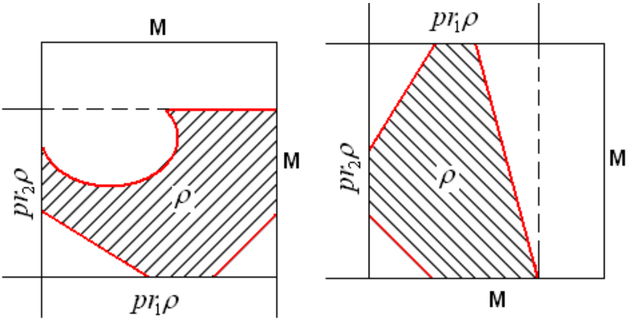
3. На множині всіх прямих на площині відношення паралельності, перпендикулярності прямих — повні сюр'єктивні.

4. На множині $A = \{10, 11, ..., 99\}$ двоцифрових натуральних чисел відношення „$m < n$“ є ефективним, але не є ні повним, ні обернено повним.

5. На множині $M_9 = \{1, 2, ..., 9\}$ одноцифрових натуральних чисел відношення „$m + n < 8$“ не є ефективним, а тому воно не є ні повним, ні обернено повним.

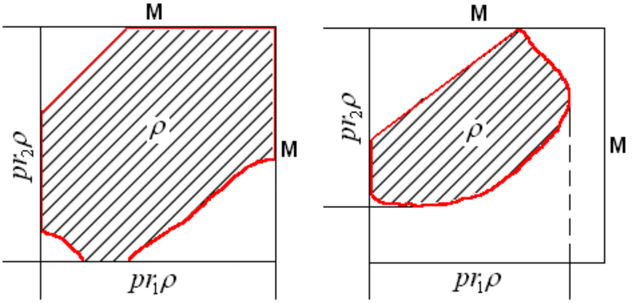
8. Розглянемо властивості бінарних відношень „**бути прямокутним відношенням**“, „**бути квадратним відношенням**“ та встановимо зв'язки між ними.

Означення 5.4.9. *Бінарне відношення називаєтьcя прямокутним бінарним відношенням на множині M, якщо існують такі підмножини $A, B \subset M$, що виконується рівність $\rho = A \times B$.*



ρ – повне (але не обернено повне)

ρ – обернено повне (але не повне)



ρ – повне сюр'єктивне

ρ – ефективне (але не повне і не обернено повне)

Мал. 1.35.

Отже, маємо: $\rho \subset M \times M$ — **прямокутне бінарне відношення на множині** $M \overset{df}{\Longleftrightarrow} (\exists A, B \subset M)\rho = A \times B$.

Означення 5.4.10. *Бінарне відношення називається квадратним бінарним відношенням на множині* M*, якщо існує така підмножина* $A \subset M$*, що виконується рівність* $\rho = A \times A$.

Отже, маємо: $\rho \subset M \times M$ — **квадратне бінарне відношення на множині** $M \overset{df}{\Longleftrightarrow} (\exists A \subset M)\rho = A \times A$.

9. Очевидні такі твердження про прямокутні та квадратні відношення:

а) універсальне бінарне відношення $M \times M$ є квадратним;

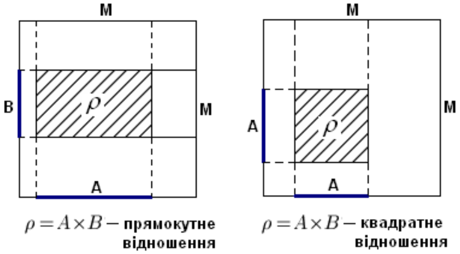
б) довільне квадратне бінарне відношення на множині M є прямокутним;

в) прямокутне бінарне відношення $A \times B$ на множині M, де $A, B \subset M$, є квадратним тоді і тільки тоді, коли виконується рівність: $A = B$;

г) якщо $\rho = A \times B$, де $A, B \subset M$ — прямокутне бінарне відношення на множині M, то $pr_1\rho = A$, $pr_2\rho = B$;

д) для того, щоб прямокутне бінарне відношення: $\rho = A \times B$ на множині M, де $A, B \subset M$, було ефективним, необхідно і достатньо, щоб виконувалась рівність: $A \cup B = M$.

10. На діаграмах зображення прямокутного, квадратного бінарних відношень матимуть такий вигляд як на малюнку 1.36.



Мал. 1.36.

11. Приклади.

1. Відношення ρ_1, задане системою нерівностей

$$\begin{cases} 4 \leqslant m + n \leqslant 6; \\ 1 \leqslant n - m \leqslant 3, \end{cases}$$

на множині $M_9 = \{1, 2, ..., 9\}$ одноцифрових натуральних чисел, є прямокутним, оскільки $\rho_1 = A \times B \subset M_9 \times M_9$, де $A = \{1, 2\}$,

$B = \{3, 4\}$.

2. Відношення ρ_2, задане системою нерівностей

$$\begin{cases} 2 \leqslant m + n \leqslant 4; \\ |n - m| \leqslant 1, \end{cases}$$

на множині $M_9 = \{1, 2, ..., 9\}$ одноцифрових натуральних чисел, є квадратним, оскільки $\rho_2 = A \times A \subset M_9 \times M_9$, де $A = \{1, 2\}$.

12. Розглянемо властивість бінарних відношень „**бути частково тотожним відношенням**“.

Означення 5.4.11. *Бінарне відношення називається частково тотожним або частково діагональним бінарним відношенням на множині M, якщо існує така підмножина $A \subset M$, що містить в точності всі пари виду $(a; a)$, де $a \in A$, і позначається Δ_A.*

Отже, $\rho \subset M \times M$ — **частково тотожне (частково діагональне) бінарне відношення на множині** $M \overset{df}{\Longleftrightarrow} (\exists A \subset \subset M) \rho \overset{df}{=} \Delta_A = \{(a; a) | a \in A\}$.

Означення 5.4.12. *Бінарне відношення $\rho \subset M \times M$ — називається тотожним або діагональним бінарним відношенням на множині M, якщо $\rho \overset{df}{=} \Delta_M = \{(a; a) | a \in M\}$, тобто ρ утворено з усіх пар виду $(a; a)$, де $a \in M$.*

Отже, $\rho \subset M \times M$ — **тотожне (діагональне) бінарне відношення на множині** $M \overset{df}{\Longleftrightarrow} \rho \overset{df}{=} \Delta_M = \{(a; a) | a \in M\}$.

13. Очевидні такі співвідношення:

а) довільне частково тотожне бінарне відношення включається в діагональне бінарне відношення на заданій множині;

б) діагональне бінарне відношення є повним сюр'єктивним відношенням на заданій множині;

в) якщо $\rho = \Delta_A$, де $A \subset M$, — частково тотожне бінарне відношення на множині M, то $pr_1 \Delta_A = pr_2 \Delta_A = pr \Delta_A = A$;

г) якщо $\rho_1 = \Delta_{A_1}$, $\rho_2 = \Delta_{A_2}$, де $A_1, A_2 \subset M$, — частково тотожні бінарні відношення на множині M, то $\rho_2 \circ \rho_1 = \rho_1 \cap \cap \rho_2 = \Delta_{A_1 \cap A_2}$, $\rho_1^{-1} = \rho_1$, $\rho_1 \cup \rho_2 = \Delta_{A_1 \cup A_2}$, $\rho_1 \setminus \rho_2 = \Delta_{A_1 \setminus A_2}$, $\rho_1 - \rho_2 = \Delta_{A_1 - A_2}$;

д) для того, щоб бінарне відношення $\rho \subset M \times M$ на множині M було частково тотожним, необхідно і достатньо щоб виконувалося включення $\rho \subset \Delta_M$, що на мові елементів рівносильно співвідношенню

$$(\forall a, b \in M)((a;b) \in \rho \to a = b).$$

14. На діаграмах зображення частково тотожного і тотожного бінарних відношень матимуть такий вигляд, як на рисунку 1.37.

Назви „частково тотожне“, „частково діагональне“, „тотожне“, „діагональне“ для розглядуваних бінарних відношень пов'язані з тим, що їх зображення розміщуються на діагоналі квадрата, який зображає декартів квадрат $M \times M$ множини M.

15. Розглянемо такі властивості бінарних відношень, як: „**бути рефлексивним відношенням**“, „**бути ефективно (або частково) рефлексивним відношенням**“, „**іррефлексивним (антирефлексивним) відношенням**“, та встановимо деякі зв'язки між ними.

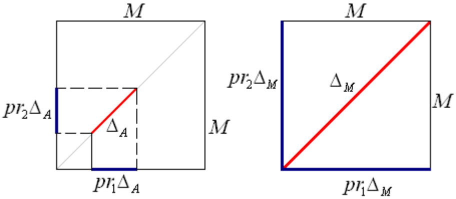
Означення 5.4.13. *Бінарне відношення $\rho \subset M \times M$ називається рефлексивним бінарним відношенням на множині M, якщо діагональ Δ_M включається в це відношення ρ, тобто $\Delta_M \subset \rho$, що на елементарній мові рівносильно співвідношенню $(\forall a \in M)(a;a) \in \rho$.*

Отже, $\rho \subset M \times M$ — **рефлексивне бінарне відношення на множині** $M \overset{df}{\Longleftrightarrow} \Delta_M \subset \rho \Longleftrightarrow (\forall a \in M)(a;a) \in \rho$.

Означення 5.4.14. *Бінарне відношення $\rho \subset M \times M$ називається ефективним (або частково) рефлексивним на множині M, якщо частково діагональне відношення $\Delta_{pr\rho}$ включається в це відношення ρ, тобто $\Delta_{pr\rho} \subset \rho$, що на елементарній мові рівносильно співвідношенню*

$$(\forall a, b \in M)((a;b) \in \rho \to (a;a), (b;b) \in \rho).$$

Отже, $\rho \subset M \times M$ — **ефективно (або частково) рефлексивне бінарне відношення на множині** $M \overset{df}{\Longleftrightarrow} \Delta_{pr\rho} \subset \rho \Leftrightarrow (\forall a, b \in \in M)((a;b) \in \rho \to (a;a), (b;b) \in \rho)$.



$\rho = \Delta_A$ – частково тотожне відношення

$\rho = \Delta_M$ – тотожне відношення

Мал. 1.37.

Означення 5.4.15. *Бінарне відношення* $\rho \subset M \times M$ *називається іррефлексивним (або антирефлексивним) бінарним відношенням на множині* M*, якщо діагональ* Δ_M *включається в доповнення* $\overline{\rho}$ *до цього відношення* ρ*, тобто* $\Delta_M \subset \overline{\rho}$*, що на елементарній мові рівносильно співвідношенню*

$$(\forall a \in M)(a; a) \notin \rho.$$

Отже, $\rho \subset M \times M$ — **іррефлексивне (або антирефлексивне) бінарне відношення на множині** $M \overset{df}{\Longleftrightarrow} \Delta_M \subset \overline{\rho} \Leftrightarrow (\forall a \in$ $\in M)(a; a) \notin \rho$.

16. Очевидні наступні твердження про рефлексивні, частково рефлексивні та іррефлексивні відношення:

а) рефлексивне бінарне відношення частково рефлексивне;

б) рефлексивне бінарне відношення повне і сюр'єктивне;

в) діагональне відношення — „найменше“ рефлексивне бінарне відношення на даній множині;

г) порожнє відношення — „найменше“ частково рефлексивне відношення;

д) універсальне бінарне відношення $M \times M$ *— найбільше рефлексивне відношення на множині* M*;*

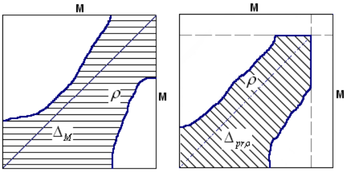
е) для того, щоб бінарне відношення на множині M *було іррефлексивним, необхідно і достатньо, щоб виконувалася рівність:* $\Delta_M \cap \rho = \varnothing$*;*

є) якщо $\rho_1, \rho_2 \subset M \times M$ *— рефлексивні бінарні відношення на множині* M*, то їх перетин* $\rho_1 \cap \rho_2$ *і об'єднання* $\rho_1 \cup \rho_2$ *теж є рефлексивними відношеннями на множині* M*, а їх різниця — іррефлексивним відношенням на* M*;*

ж) для того, щоб відношення $\rho \subset M \times M$ *було рефлексивним на множині* M*, необхідно і достатньо, щоб його доповнення* $\overline{\rho}$ *було іррефлексивним на* M*;*

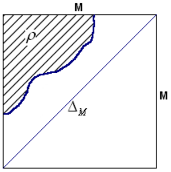
з) частково рефлексивне відношення рефлексивне тоді і тільки тоді, коли воно ефективне на даній множині.

17. На діаграмах зображення рефлексивних, частково рефлексивних, іррефлексивних бінарних відношень матимуть такий вигляд, як на малюнку 1.38.



ρ — рефлексивне відношення

ρ — частково рефлексивне



ρ — іррефлексивне відношення

Мал. 1.38.

18. Приклади.

1. Відношення „$m < n$“ на множині $\mathbb{N}$ натуральних чисел іррефлексивне.

2. Відношення „$m \leqslant n$“, „$m \geqslant n$ “ на множині $\mathbb{N}$ натуральних

чисел рефлексивні.

3. Відношення „$m \leqslant n$“, „$m \geqslant n$ “, де $m, n \in \mathbb{N}$ — натуральні числа, на множині $\mathbb{Z}$ цілих чисел частково рефлексивні.

4. Відношення подібності фігур на площині рефлексивне.

5. Відношення рівносильності предикатів, формул в логіці предикатів рефлексивні.

6. Відношення „бути сусідом“ на множині студентів, що сидять в даній аудиторії, — іррефлексивне.

7. Відношення подільності натуральних чисел — рефлексивне.

8. Відношення „$m + n \leqslant 100$“ на множині $\mathbb{N}$ натуральних чисел ні рефлексивне, ні частково рефлексивне, ні іррефлексивне.

19. Розглянемо далі такі властивості бінарних відношень, як: „**бути симетричним відношенням**“, „**бути асиметричним відношенням**“, „**бути антисиметричним відношенням**“, та встановимо деякі зв'язки між ними.

Означення 5.4.16. *Відношення $\rho \subset M \times M$ називається симетричним бінарним відношенням на множині M, якщо воно включається в обернене до самого себе відношення ρ^{-1}, тобто $\rho \subset \rho^{-1}$, що на елементарному рівні рівносильно такому співвідношенню:*

$$(\forall a, b \in M)((a; b) \in \rho \to (a; b) \in \rho^{-1}),$$

тобто рівносильно співвідношенню

$$(\forall a, b \in M)((a; b) \in \rho \to (b; a) \in \rho).$$

Отже, $\rho \subset M \times M$ — **симетричне бінарне відношення на множині** $M \overset{df}{\Longleftrightarrow} \rho \subset \rho^{-1} \Leftrightarrow (\forall a, b \in M)((a; b) \in \rho \to (b; a) \in \rho)$.

Означення 5.4.17. *Відношення $\rho \subset M \times M$ — називається асиметричним бінарним відношенням на множині M, якщо воно включається в доповнення $\overline{\rho^{-1}}$ до свого обертання ρ^{-1}, тобто $\rho \subset \overline{\rho^{-1}}$, що на елементарному рівні рівносильно такому співвідношенню:*

$$(\forall a, b \in M)((a; b) \in \rho \to (a; b) \notin \rho^{-1}),$$

тобто рівносильно співвідношенню:

$$(\forall a, b \in M)((a; b) \in \rho \to (b; a) \notin \rho).$$

Отже, $\rho \subset M \times M$ — асиметричне бінарне відношення на множині $M \overset{df}{\Longleftrightarrow} \rho \subset \overline{\rho^{-1}} \Leftrightarrow (\forall a, b \in M)((a; b) \in \rho \to (b; a) \notin \rho)$.

Означення 5.4.18. *Відношення $\rho \subset M \times M$ називаеться антисиметричним бінарним відношенням на множині M, якщо перетин цього відношення ρ з своїм обертанням ρ^{-1} є частково тотожним відношенням на множині M, тобто $\rho \cap \rho^{-1} \subset \Delta_M$, що на елементарному рівні рівносильно співвідношенню*

$$(\forall a, b \in M)((a; b) \in \rho \wedge (b; a) \in \rho \to a = b).$$

Отже, $\rho \subset M \times M$ — **антисиметричне бінарне відношення на множині** $M \overset{df}{\Leftrightarrow} \rho \cap \rho^{-1} \subset \Delta_M \Leftrightarrow (\forall a, b \in M)((a; b) \in p \wedge (b; a) \in$ $\in \rho \to a = b)$.

19. Легко показати, що **мають місце такі твердження про симетричні, асиметричні та антисиметричні бінарні відношення:**

а) для того, щоб бінарне відношення $\rho \subset M \times M$ було симетричним, необхідно і достатньо, щоб виконувалася одна із рівносильних між собою умов:

$$\begin{gathered}
\rho^{-1} \subset \rho; \\
\rho^{-1} = \rho; \\
\rho \setminus \rho^{-1} = \varnothing; \\
\rho - \rho^{-1} = \varnothing; \\
\rho \cap \rho^{-1} = \rho; \\
\rho \cap \rho^{-1} = \rho^{-1}; \\
\rho \cup \rho^{-1} = \rho; \\
\rho \cup \rho^{-1} = \rho^{-1},
\end{gathered}$$

б) для того, щоб бінарне відношення $\rho \subset M \times M$ було асиметричним, необхідно і достатньо, щоб виконувалася одна із рівносильних між собою умов:

$$\begin{gathered}
\rho \subset (\overline{\rho})^{-1}; \\
\rho^{-1} \subset (\overline{\rho}); \\
\rho \cap \rho^{-1} = \varnothing; \\
\rho \setminus \overline{\rho^{-1}} = \varnothing; \\
\rho \setminus (\overline{\rho})^{-1} = \varnothing; \\
\overline{\rho} \cup (\overline{\rho})^{-1} = M \times M,
\end{gathered}$$

в) довільне асиметричне бінарне відношення є антисиметричним;

г) порожне відношення є „найменшим“ симетричним, асиметричним і антисиметричним бінарними відношеннями;

д) універсальне бінарне відношення $M \times M$ — „найбільше“ симетричне бінарне відношення;

е) для того, щоб симетричне бінарне відношення було одночасно і асиметричним, необхідно і достатньо, щоб воно було порожнім;

є) для того, щоб симетричне бінарне відношення було одночасно і антисиметричним, необхідно і достатньо, щоб воно було частково тотожним;

ж) для того, щоб антисиметричне бінарне відношення було одночасно і асиметричним, необхідно і достатньо, щоб воно було іррефлексивним;

з) довільне асиметричне бінарне відношення — іррефлексивне;

и) перетин, об'єднання, різниця симетричних бінарних відношень є симетричним бінарним відношенням;

і) перетин, різниця асиметричних бінарних відношень є асиметричним бінарним відношенням;

ї) перетин, різниця антисиметричних бінарних відношень є антисиметричним бінарним відношенням;

й) якщо $\rho \subset M \times M$ — довільне бінарне відношення на множині M, то відношення: $\rho \cap \rho^{-1}$, $\rho \cup \rho^{-1} \subset M \times M$ — симетричні бінарні відношення.

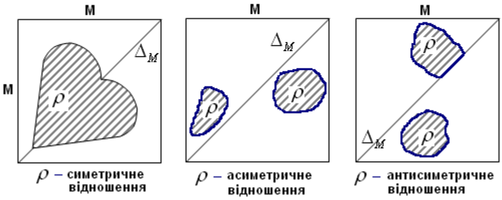
21. На діаграмах зображення симетричних, асиметричних і антисиметричних бінарних відношень матимуть такий вигляд, як на малюнку 1.39.

На цих діаграмах бачимо, що:

а) зображення симетричного відношення є справді симетричним відносно діагоналі квадрата, який зображає декартовий квадрат $M \times M$ множини M;

б) зображення асиметричного відношення не містить симетричних точок відносно вказаної діагоналі;

в) зображення антисиметричного відношення може містити лише такі симетричні точки, які є точками вказаної діагоналі.



ρ – симетричне відношення

ρ – асиметричне відношення

ρ – антисиметричне відношення

Мал. 1.39.

Приклади.

1. Відношення „бути сусідом партою на лекції“ на множині студентів в даній аудиторії — симетричне.

2. Відношення „$x < y$“ на множині $\mathbb{R}$ дійсних чисел — асиметричне.

3. Відношення „$m \leqslant n$“, де $m, n \in \mathbb{N}$ — натуральні числа, антисиметричне на множині $\mathbb{Z}$ цілих чисел.

4. Відношення „вчитися на одному курсі“ на множині всіх студентів інституту — симетричне.

5. Відношення подільності на множині $\mathbb{N}$ натуральних чисел — антисиметричне.

6. Відношення строгого включення підмножин на заданій множині — асиметричне.

7. Відношення „$m - n \in \mathbb{N}$“, де $m, n \in \mathbb{N}$ — натуральні числа, на множині $\mathbb{N}$ натуральних чисел — асиметричне.

8. Відношення „$p(a) \leqslant p(b)$“, де $a, b \in S$ — студенти першого курсу інституту, $p(c)$ — вага студента c з точністю до кілограмів, не є ні асиметричним, ні антисиметричним, ні симетричним відношенням на множині S — студентів першого курсу.

22. Розглянемо **відношення транзитивності та інтранзитивності**, а також деякі їх властивості.

Означення 5.4.19. *Відношення $\rho \subset M \times M$ називається транзитивним бінарним відношенням на множині M, якщо $\rho \circ \rho \subset \rho$,* *що на елементарному рівні рівносильно співвідношенню*

$$(\forall a,b,c\in M)((a;b)\in\rho\wedge(b;c)\in\rho\to(a;c)\in\rho).$$

Отже, $\rho\subset M\times M$ — **транзитивне бінарне відношення на множині** $M \overset{df}{\Longleftrightarrow} \rho\circ\rho\subset\rho \Leftrightarrow (\forall a,b,c\in M)((a;b)\in\rho\wedge(b;c)\in \in\rho\to(a;c)\in\rho)$.

Означення 5.4.20. *Відношення $\rho\subset M\times M$ називаеться інтранзитивним бінарним відношенням на множині M, якщо $\rho\circ\rho\subset\overline{\rho}$, що на елементарному рівні рівносильно співвідношенню*

$$(\forall a,b,c\in M)((a;b)\in\rho\wedge(b;c)\in\rho\to(a;c)\notin\rho).$$

Отже, $\rho\subset M\times M$ — **інтранзитивне бінарне відношення на множині** $M \overset{df}{\Longleftrightarrow} \rho\circ\rho\subset\overline{\rho} \Leftrightarrow (\forall a,b,c\in M)((a;b)\in p\wedge(b;c)\in p\to \to(a;c)\notin\rho)$.

23. Легко бачити, що **мають місце такі твердження для транзитивних та інтранзитивних бінарних відношень:**

а) порожнє, універсальне та довільне частково тотожне бінарні відношення є транзитивними відношеннями на заданій множині;

б) перетин транзитивних відношень є транзитивним відношенням на заданій множині;

в) для того, щоб бінарне відношення було одночасно транзитивним та інтранзитивним на заданій множині, необхідно і достатньо, щоб виконувалася рівність $\rho\circ\rho=\varnothing$;

г) для того, щоб бінарне відношення $\rho\subset M\times M$ було транзитивним на заданій множині M, необхідно і достатньо, щоб виконувалася рівність: $\rho=\bigcup\limits_{n\in N}\rho^n$, тобто: $\rho=\rho\cup\rho\circ\rho\cup\rho\circ\rho\circ\rho\cup\ldots\cup \cup\underbrace{\rho\circ\rho\circ\ldots\circ\rho}_{n\ раз}\cup\ldots$ або, що одне і те ж саме, $\rho=\rho\cup\rho^2\cup\rho^3\cup\ldots\cup\rho^n\cup\ldots$.

24. Приклади.

1. Відношення подібності фігур на площині транзитивне.

2. Відношення „$a<b$“, „$a\leqslant b$“ на числовій множині транзитивні.

3. Відношення „бути за партою сусідом“ на множині всіх студентів в даній аудиторії інтранзитивне.

4. Відношення перпендикулярності прямих на площині інтранзитивне.

5. Відношення подільності цілих чисел транзитивне.

6. Відношення „$\rho(a) \leqslant \rho(b)$“, де $a, b \in S$ — студенти даної аудиторії, $\rho(c)$ — вага студента $c \in S$, є транзитивним відношенням на множині S всіх студентів даної аудиторії.

7. Відношення включення між підмножинами даної множини — транзитивне.

25. Розглянемо, нарешті, відношення **зв'язності та часткової зв'язності**, а також деякі їх властивості.

Означення 5.4.21. *Відношення: $\rho \subset M \times M$ називається зв'язним (іноді називають досконалим) бінарним відношенням на множині M, якщо виконується рівність: $\rho \cup \rho^{-1} \cup \Delta_M = M \times M$, що на елементарному рівні рівносильно співвідношенню:*

$$(\forall a, b \in M)((a; b) \in \rho \vee (b; a) \in \rho \vee a = b).$$

Отже, $\rho \subset M \times M$ — **зв'язне (або досконале) бінарне відношення на множині** $M \overset{df}{\Longleftrightarrow} \rho \cup \rho^{-1} \cup \Delta_M = M \times M \Leftrightarrow (\forall a, b \in M)((a; b) \in \rho \vee (b; a) \in \rho \vee a = b)$.

Означення 5.4.22. *Відношення $\rho \subset M \times M$ називається частково зв'язним (або частково досконалим) бінарним відношенням на множині M, якщо виконується рівність: $\rho \cup \rho^{-1} \cup \Delta_{pr\rho} = pr\rho \times pr\rho$, що на елементарному рівні рівносильно співвідношенню*

$$(\forall a, b \in M)(a, b \in pr\rho \to (a; b) \in \rho \vee (b; a) \in \rho \vee (a = b \wedge a \in pr\rho)).$$

Отже, $\rho \subset M \times M$ — **частково зв'язне (або частково досконале)** бінарне відношення на множині $M \overset{df}{\Leftrightarrow} \rho \cup \rho^{-1} \cup \Delta_{pr\rho} = pr\rho \times pr\rho \Leftrightarrow (\forall a, b \in M)(a, b \in pr\rho \to (a; b) \in \rho \vee (b; a) \in \rho \vee (a = b \wedge a \in pr\rho))$.

26. Легко бачити, що справедливі наступні твердження для зв'язних та частково зв'язних бінарних відношень:

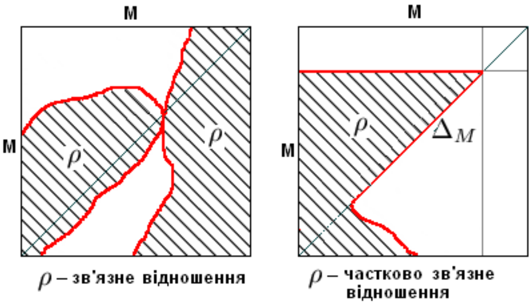
а) зв'язне бінарне відношення завжди частково зв'язне;

б) обернене до зв'язного бінарного відношення є також зв'язним бінарним відношенням на заданій множині;

в) обернене до часткового зв'язного бінарного відношення є теж частково зв'язним бінарним відношенням на заданій множині;

г) об'єднання зв'язних бінарних відношень є зв'язним бінарним відношенням на заданій множині.

27. На діаграмах зображення зв'язних і частково зв'язних бінарних відношень матимуть такий вигляд, як на малюнку 1.40.



ρ – зв'язне відношення

ρ – частково зв'язне відношення

Мал. 1.40.

28. Приклади.

1. Відношення „$a < b$“, „$a \leqslant b$“ на числовій множині зв'язні.

2. Відношення „$\rho(a) < \rho(b)$“, де $a, b \in S$ — студенти даної аудиторії, $\rho(c)$ — вага студента $c \in S$, є зв'язним на множині S всіх студентів даної аудиторії.

3. Відношення подільності на множині $\mathbb{N}$ натуральних чисел не є зв'язним відношенням на цій множині.

4. Відношення „$m - n \in \mathbb{N}$“, де $m, n \in \mathbb{N}$ — натуральні числа, на множині $\mathbb{Z}$ всіх цілих чисел є частково зв'язним відношенням.

5.5 Відношення еквівалентності та його зв'язок з розбиттям множини; фактор-множина; деякі узагальнення

1. Далі розглянемо такі бінарні відношення, які можуть володіти одночасно кількома властивостями, розглянутими в попередньому параграфі 5.4.

Одним із найбільш поширених і широко використовуваних на практиці відношень є так зване **відношення еквівалентності**, означення якого наступне.

Означення 5.5.1. *Відношення $\varepsilon \subset M \times M$ називаєтьса відношенням еквівалентності (або просто — еквівалентністю) на множині M, якщо воно одночасно рефлексивне, симетричне і транзитивне на множині M, тобто $\Delta_M \subset \varepsilon$, $\varepsilon \subset \varepsilon^{-1}$, $\varepsilon \circ \varepsilon \subset \varepsilon$, що на елементарному рівні рівносильно відповідно таким тръом співвідношенням:*

$$\forall a \in M)(a;a) \in \varepsilon; \tag{5.5.1}$$

$$(\forall a,b \in M)((a;b) \in \varepsilon \to (b;a) \in \varepsilon); \tag{5.5.2}$$

$$(\forall a,b,c \in M)((a;b) \in \varepsilon \wedge (b;c) \in \varepsilon \to (a;c) \in \varepsilon). \tag{5.5.3}$$

Отже, $\varepsilon \subset M \times M$ — **відношення еквівалентності (еквівалентність) на множині** $M \overset{df}{\iff} (\Delta_M \subset \varepsilon \wedge \varepsilon \subset \varepsilon^{-1} \wedge \varepsilon \circ \varepsilon \subset \varepsilon) \Leftrightarrow$ $((5.5.1) \wedge (5.5.2) \wedge (5.5.3))$.

Іноді, для еквівалентності вживають спеціальні позначення. Наприклад, такі, як: $\equiv$, $\sim$ і т.п. Тоді замість запису $(a;b) \in \varepsilon$ вживають, наприклад, запис $a \equiv b(\varepsilon)$, якого, іноді, будемо притримуватися надалі.

2. Приклади еквівалентностей.

1. Відношення подібності φ фігур на площині є еквівалентністю на площині P.

2. Відношення рівності (співпадання) елементів на тій чи іншій множині M — це Δ_M — діагональ множини M, є еквівалентність на M.

3. Відношення $\tau =$„вчитися на одному і тому ж курсі“ є еквівалентністю на множині S всіх студентів інституту.

4. Відношення ε_3, яке визначене співвідношенням $m \equiv n(\varepsilon_3) \overset{df}{\Longleftrightarrow}$ $\overset{df}{\Longleftrightarrow} (m-n)\vdots 3$, де $m, n \in \mathbb{Z}$, є еквівалентністю на множині $\mathbb{Z}$ цілих чисел.

5. Відношення ρ рівносильності формул є еквівалентністю на множині F всіх логічних формул.

6. Відношення $\lambda =$„проживати в одній кімнаті" є еквівалентністю на множині S всіх студентів даного гуртожитку.

7. Відношення α співнапрямленості векторів є еквівалентністю на множині V всіх векторів площини.

8. Відношення $\pi =$„Мати рівні площі" для трикутників є еквівалентністю на площині T всіх трикутників на площині.

3. Кожна еквівалентність по суті в певному розумінні — це „рівність", тобто є узагальненням відношення рівності (у розумінні співпадання) елементів. Це пов'язано з тим, що, говорячи про еквівалентні елементи (відносно певного заданого відношення еквівалентності), ми до певної міри вважаємо їх „рівними", суттєво нерозрізнимими відносно розглядуваної еквівалентності, тобто рівноправними між собою. Так, **наприклад,** „бути ровесниками" означає рівність по віку, „рівні трикутники" означає, що у цих трикутників відповідні сторони мають рівні довжини, а відповідні кути — одну і ту же саму кутову величину, „рівносильні висловлення" означає, що у них одне і те ж саме істинносне значення і т.д. .

4. Розглянемо більш детально будову відношення еквівалентності на множині. Виявляється, що кожна еквівалентність на множині тісно пов'язана з **розбиттям множини на підмножини** (іноді говорять, — на класи).

Означення 5.5.2. *Розбиттям множини M на підмножини називається така множина $G_M \overset{df}{=} \{M_i | i \in I\}$ непорожніх підмножин $M_i \subset M$, де $i \in I$, I — це множина індексів, що ці підмножини попарно не перетинаються, а їх об'єднання співпадає з даною множиною M.*

Отже, $G_M = \{M_i | i \in I\}$ — **розбиття множини на класи** M_i, де $i \in I \overset{df}{\Longleftrightarrow} (1) \wedge (2) \wedge (3)$, де

(1): $(\forall i \in I)(\varnothing \neq M_i \subset M)$;

(2): $(\forall i, j \in I)(i \neq j \to M_i \cap M_j = \varnothing)$;

(3): $\bigcup\limits_{i \in I} M_i = M$, де I — множина індексів.

Приклади.

1. Множина $G_1, G_2, ..., G_{60}$ всіх груп інституту — розбиття множини S всіх студентів інституту на групи G_i, де $i = 1, 2, ..., 60$.

2. $\{2N, 2N - 1\}$ — розбиття множини $\mathbb{N}$ всіх натуральних чисел на підмножини $2N$ всіх парних і $2N - 1$ всіх непарних натуральних чисел.

3. $\{M_n | n \in N \setminus \{1, 2\}\}$ — розбиття множини M всіх многокутників на площині P на підмножини M_n, де $n > 2$, кожна з яких містить всі n-кутники цієї площини P.

5. Нехай $\varepsilon \subset M \times M$ — еквівалентність на множині M, $a \in M$ — довільний елемент цієї множини.

Означення 5.5.3. *Зріз* $\varepsilon\langle a \rangle = \{b | a \equiv b(\varepsilon)\}$ *цієї еквівалентності* ε *по елементу* $a \in M$ *називається класом еквівалентності* ε *з представником* $a \in M$ *або, коротко,* ε*-класом з представником* $a \in M$.

Отже, ε**-клас з представником** $a \in M$ **по еквівалентності** ε — це зріз $\varepsilon\langle a \rangle = \{b | a \equiv b(\varepsilon)\}$ еквівалентності ε по $a \in M$.

Означення 5.5.4. *Фактор-множиною множини* M *по еквівалентності* $\varepsilon \subset M \times M$ *на цій множині* M *називається множина всіх* ε*-класів по* ε*, яка позначається символом* M/ε.

Отже, M/ε — **фактор-множина множини** M **по еквівалентності** $\varepsilon \subset M \times M \overset{df}{\Longleftrightarrow} M/\varepsilon \overset{df}{=} \{\varepsilon\langle a \rangle | a \in M\}$.

6. Приклади фактор-множин по кожній з восьми еквівалентностей, наведених вище в пункті 2 даного параграфу.

1. P/ε — множина всіх груп фігур, кожна з яких містить всі подібні між собою фігури даної площини P.

2. $M/\Delta_M = \{\{a\} | a \in M\}$ — множина всіх одноелементних підмножин даної множини M.

3. $\tau/S = \{K_1, K_2, K_3, K_4, K_5\}$ — множина підмножин $K_i \subset S$, де $i = 1, 2, 3, 4, 5$, кожна з яких містить всіх однокурсників i-го курсу інституту.

4. $Z/\varepsilon_3 = \{3Z, 3Z+1, 3Z+2\}$ — множина, яка містить в ролі елементів підмножини множини $\mathbb{Z}$ цілих чисел такі, що кожен елемент підмножини при діленні на 3 дає однакову остачу — відповідно 0, 1 або 2.

5. F/ρ — множина всіх класів логічних формул, кожен з яких містить всі рівносильні між собою формули.

6. S/λ — множина всіх кімнат, в яких живуть всі студенти даного гуртожитку.

7. V/α — множина всіх класів множини V векторів площини, в кожному з яких містять всі вектори одного певного напрямку.

8. T/π — множина всіх класів трикутників на площині, кожен з яких містить всі трикутники з однією і тією ж площею.

7. Зв'язок між еквівалентностями на множині та їх розбиттями розкриває така теорема:

Теорема 5.5.1. *Якщо $\varepsilon \subset M \times M$ — еквівалентність на множині M, то фактор-множина M/ε є таким розбиттям множини M на ε-класи, що $\varepsilon = \bigcup\limits_{a \in M} (\varepsilon\langle a\rangle \times \varepsilon\langle a\rangle)$, тобто еквівалентність ε є об'єднанням декартових квадратів по всім ε-класам.*

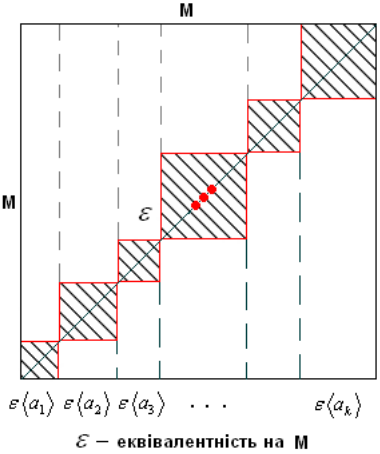
Доведення. Нехай $\varepsilon \subset M \times M$ — еквівалентність на множині M, а M/ε — відповідна фактор-множина цієї множини по ε. В силу рефлексивності маємо: $a \equiv a(\varepsilon)$, тобто $a \in \varepsilon\langle a\rangle$ для будь-якого $a \in M$, що вказує на те, що всі ε-класи непорожні, а їх об'єднання $\bigcup\limits_{a \in M} \varepsilon\langle a\rangle$ дає всю множину M, тобто: $M = \bigcup\limits_{a \in M} \varepsilon\langle a\rangle$. Покажемо тепер, що різні ε-класи не перетинаються. Нехай класи $\varepsilon\langle a\rangle$, $\varepsilon\langle b\rangle$ перетинаються. Тоді для деякого $c \in M$ маємо $c \in \varepsilon\langle a\rangle$ і $c \in \varepsilon\langle b\rangle$, тобто $a \equiv c(\varepsilon)$, $b \equiv c(\varepsilon)$. Покажемо, що $\varepsilon\langle a\rangle = \varepsilon\langle b\rangle$, тобто класи $\varepsilon\langle a\rangle$ і $\varepsilon\langle b\rangle$ співпадають. Для довільного $x \in M$ маємо: якщо $x \in \varepsilon\langle a\rangle$, то $b \equiv c(\varepsilon)$, $c \equiv a(\varepsilon)$, $a \equiv x(\varepsilon)$, звідки в силу транзитивності ε маємо $b \equiv x(\varepsilon)$, тобто $x \in \varepsilon\langle b\rangle$. Отже, $\varepsilon\langle a\rangle \subset \varepsilon\langle b\rangle$. Аналогічно показуємо включення $\varepsilon\langle b\rangle \subset \varepsilon\langle a\rangle$, звідки і отримуємо рівність $\varepsilon\langle b\rangle = \varepsilon\langle a\rangle$. Таким чином, показано, що фактор-множина M/ε є розбиттям множини M на ε-класи. Залишилося довести, що еквівалентність множини M є об'єднанням декартових квадратів по всім ε-класам, тобто виконується рівність $\varepsilon = \bigcup\limits_{a\in M}(\varepsilon\langle a\rangle) \times \varepsilon\langle a\rangle)$. Нехай $a \equiv b(\varepsilon)$. Тоді очевидно, що $a \in \varepsilon\langle a\rangle$, $b \in \varepsilon\langle a\rangle$, тобто $(a;b) \in (\varepsilon\langle a\rangle \times \varepsilon\langle a\rangle) \subset \bigcup\limits_{a\in M}(\varepsilon\langle a\rangle \times \varepsilon\langle a\rangle)$. Отже, показано включення $\varepsilon \subset \bigcup\limits_{a\in M}(\varepsilon\langle a\rangle) \times \varepsilon\langle a\rangle)$. Нехай тепер $(x;y) \in \bigcup\limits_{a\in M}(\varepsilon\langle a\rangle \times \varepsilon\langle a\rangle)$, тобто $x \in \varepsilon\langle a\rangle$, $y \in \varepsilon\langle a\rangle$ для деякого $a \in M$, що рівносильно тому, що $x \equiv a(\varepsilon)$, $a \equiv y(\varepsilon)$. Застосувавши транзитивність ε, в результаті отримаємо: $x \equiv y(\varepsilon)$. Отже, показано і включення $\bigcup\limits_{a\in M}(\varepsilon\langle a\rangle \times \varepsilon\langle a\rangle) \subset \varepsilon$, звідки, в силу доведеного раніше включення $\varepsilon \subset \bigcup\limits_{a\in M}(\varepsilon\langle a\rangle \times \varepsilon\langle a\rangle)$, отримуємо рівність: $\varepsilon = \bigcup\limits_{a\in M}(\varepsilon\langle a\rangle \times \varepsilon\langle a\rangle)$, чим і завершується доведення теореми ■

8. З доведеної вище теореми 5.5.1 випливає, що зображення еквівалентності на діаграмі можна подати у вигляді об'єднання квадратів, які між собою не перетинаються і діагоналі яких в сукупності утворюють всю діагональ квадрата, який зображає декартовий квадрат множини, на якому задана еквівалентність. В результаті зображення еквівалентності матиме такий вигляд, як на малюнку 1.41.

9. Виявляється, що має місце і теорема, обернена до теореми 5.5.1, яка підсилює зв'язок між еквівалентностями на множині та їх розбиттями.

Теорема 5.5.2. *Якщо $G_M = \{M_i | i \in I\}$ — розбиття множини M на класи M_i, де $i \in I$, то відношення $\varepsilon_{G_M} = \bigcup\limits_{I\in I}(M_i \times M_i)$ є такою еквівалентністю на множині M, що її фактор-множина M/ε_{G_M} співпадає з даним розбиттям G_M, тобто $M/\varepsilon_{G_M} = G_M$.*

Доведення. Нехай $G_M = \{M_i | i \in I\}$ — розбиття множини M на класи M_i, де $i \in I$. Покажемо, що відношення $\varepsilon_{G_M} = \bigcup\limits_{I\in I}(M_i \times M_i)$ є еквівалентністю на множині M. Нехай $a \in M$ — довільний елемент множини M. Оскільки $M = \bigcup\limits_{I\in I} M_i$, то $a \in M_i$ для деякого $i \in I$,



Мал. 1.41.

звідки $(a;a) \in (M_i \times M_i) \subset \varepsilon_{G_M}$. Тому ε_{G_M} — рефлексивне відношення на M. Якщо $(a;b) \in \varepsilon_{G_M}$, тобто $(a;b) \in M_i \times M_i$ для деякого $i \in I$, то очевидно, що і $(b;a) \in M_i \times M_i$, оскільки $a, b \in M_i$. Тому ε_{G_M} — симетричне відношення на M. Нехай $(a;b), (b;c) \in \varepsilon_{G_M}$, тобто для деяких $i, j \in I$ маємо: $a, b \in M_i$ і $b, c \in M_j$. Оскільки $b \in M_i, M_j$, тобто $M_i \cap M_j \neq \varnothing$, то в силу умови теореми $M_i = M_j$ (адже G_M — розбиття множини M). Звідси випливає, що $a, c \in M_i$, тобто $(a, c) \in M_i \times M_i \subset \varepsilon_{G_M}$. Отже, ε_{G_M} — транзитивне відношення. Таким чином, доведено, що ε_{G_M} — еквівалентність на множині M. Візьмемо тепер довільний ε_{G_M}-клас з представником $a \in M$. Оскільки $a \in M_i$ для деякого $i \in I$, то для всякого $x \in \varepsilon_{G_M}\langle a\rangle$ маємо $a, x \in M_i$, що дає $x \in M_i$ і, отже, $\varepsilon_{G_M}\langle a\rangle \subset M_i$. Покажемо, що і $M_i \subset \varepsilon_{G_M}\langle a\rangle$. Для довільного $x \in M_i$ маємо: $a, x \in M_i$, що дає $(a;x) \in M_i \times M_i \subset \varepsilon_{G_M}$, тобто $a \equiv x(\varepsilon_{G_M})$, і, отже, $x \in \varepsilon_{G_M}\langle a\rangle$. Звідси отримаємо включення $M_i \subset \varepsilon_{G_M}\langle a\rangle$, що разом з попереднім включенням $\varepsilon_{G_M} \subset M_i$ дає рівність $\varepsilon_{G_M}\langle a\rangle = M_i$. Таким чином, всі ε_{G_M}- класи є членами розбиття G_M множини M на класи M_i, де $i \in I$, тобто виконується рівність $M/\varepsilon_{G_M} = G_M$, чим і завершується доведення теореми ■

Висновок. Між усіма еквівалентностями даної множи-

ни M і всіма розбиттями цієї множини встановлюється, говорять, взаємно однозначна відповідність: кожній еквівалентності ε відповідає єдине розбиття M/ε — це фактор-множина по ε і, навпаки, кожному розбиттю $G_M = \{M_i \subset \subset M | i \in I\}$ множини M відповідає єдина еквівалентність: $\varepsilon_{G_M} = \bigcup\limits_{i \in I}(M_i \times M_i)$ на M.

А це вказує на те, що вивчення еквівалентностей на множині можна звести до вивчення розбиттів на цій множині, і навпаки. Такою обставиною часто користуються в різноманітних дослідженнях.

10. Як уже відмічалось раніше, еквівалентність на множині є узагальненням відношення рівності елементів, оскільки еквівалентні між собою елементи вважаються рівноправними, нерозрізнимими відносно введеної еквівалентності на цій множині.

Вище також було встановлено, що еквівалентність на множині утворює так звану фактор-множину, тобто ця еквівалентність здійснює розбиття даної множини на класи, на групи, в кожній з яких елементи множини вважаються **еквівалентно рівними, рівноправними, нерозрізнимими відносно цієї еквівалентності.**

На практиці **введення тієї чи іншої еквівалентності** ε на певній множині M часто значно **полегшує дослідження** цієї множини та її елементів, а саме: замість дослідження властивостей кожного елемента множини можна вивчати властивості кожного ε-класу фактор-множини M/ε.

Наведемо в якості ілюстрації такий **простий приклад:** необхідно дати аналіз навчання студентів інституту за певний період. Зрозуміло, що проаналізувати навчання кожного студента важко, потрібно затратити багато часу і, саме головне, з отриманих даних успішності по кожному студенту зробити загальний якісний аналіз успішності студентів всього інституту, що практично неможливо. Щоб полегшити проведення такого аналізу успішності, можна ввести відношення еквівалентності „вчитися на одному курсі“. В результаті отримаємо фактор-множину з п'яти підмножин K_1, K_2, K_3, K_4, K_5, де K_i — це множина всіх студентів інституту, що вчаться на i-му курсі ($i = \overline{1, 5}$). Після цього неважко отримати загальні дані навчання по кожному курсу окремо, і проаналізувати їх, співставити між собою по курсах та зробити певні висновки.

Відмітимо також і те, що **вводячи чи вживаючи те чи інше поняття**, **ми** завжди **неявно використовуємо той чи інший клас певної еквівалентності**, заданої на деякій множині. Наприклад, фраза „розглянемо прямокутний трикутник“ має на увазі те, що цим самим серед всіх трикутників ми виділили клас трикутників з прямим кутом. Аналогічна фраза „візьмемо квадрат“ вказує на те, що серед всіх фігур на площині виділили клас подібних між собою квадратів.

11. Відмітимо деякі очевидні твердження відносно еквівалентностей на заданій множині M:

а) Δ_M *— це „найменша“ еквівалентність на* M*, кожен клас еквівалентності якої є одноелементна множина;*

б) $M \times M$ *— це „найбільша“ еквівалентність на* M*, фактор-множина по якій містить єдиний клас — множину* M*;*

в) перетин еквівалентностей на M *є еквівалентністю на* M*;*

г) для того, щоб відношення $\varepsilon \subset M \times M$ *було еквівалентністю на множині* M*, необхідно і достатньо, щоб виконувалися рівності* $\varepsilon \cup \Delta_M = \varepsilon = \varepsilon^{-1} \circ \varepsilon$ *або ж такі включення:* $\Delta_M \subset \varepsilon$, $\varepsilon \circ \varepsilon^{-1} \subset \varepsilon$*;*

д) для того, щоб об'єднання еквівалентностей $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \subset M \times M$ *на множині* M *було еквівалентністю, необхідно і достатньо, щоб виконувалась рівність* $\varepsilon_1 \cup \varepsilon_2 = \varepsilon_2 \circ \varepsilon_1$*;*

е) композиція еквівалентностей $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \subset M \times M$ *на множині* M *є еквівалентністю на цій множині тоді і тільки тоді, коли виконується рівність* $\varepsilon_2 \circ \varepsilon_1 = \varepsilon_1 \circ \varepsilon_2$.

12. Не вдаючись в деталі дослідження, відмітимо лише, що існують різні **узагальнення еквівалентності на множині**. Наведемо означення деяких з них та взаємозв'язки з еквівалентностями.

Означення 5.5.5. *Відношення* $\varepsilon \subset M \times M$ *називається частковою еквівалентністю на множині* M*, якщо* ε *— симетричне і транзитивне відношення на цій множині, тобто* $\varepsilon \subset \varepsilon^{-1}$ *і* $\varepsilon \circ \varepsilon \subset \varepsilon$*, що на елементарному рівні рівносильно відповідно таким співвідношенням (5.5.4) і (5.5.5):*

$$(\forall a, b \in M)((a; b) \in \varepsilon \to (b; a) \in \varepsilon); \qquad (5.5.4)$$

$$(\forall a, b, c \in M)((a; b) \in \varepsilon \wedge (b; c) \in \varepsilon \to (a; c) \in \varepsilon). \qquad (5.5.5)$$

Отже, $\varepsilon \subset M \times M$ — **часткова еквівалентність на множині** $M \overset{df}{\Longleftrightarrow} (\varepsilon \subset \varepsilon^{-1} \wedge \varepsilon \circ \varepsilon \subset \varepsilon) \Leftrightarrow ((5.5.4)\wedge\ (5.5.5))$.

Легко бачити, що для часткових еквівалентностей на множині M мають місце такі твердження:

а) якщо $\varepsilon \subset M \times M$ — часткова еквівалентність на множині M, то вона частково рефлексивна, причому $\Delta_{pr\varepsilon} = \Delta_{pr_1\varepsilon} = \Delta_{pr_2\varepsilon}$, і тому ця часткова еквівалентність є еквівалентністю на своїй області визначення, тобто на підмножині $pr_1\varepsilon$ множини M;

б) для того, щоб часткова еквівалентність $\varepsilon \subset M \times M$ на множині M була еквівалентністю, необхідно і достатньо, щоб виконувалася одна із рівностей $pr_1\varepsilon = M$, $pr_2\varepsilon = M$, $pr\varepsilon = M$;

в) для того, щоб відношення $\varepsilon \subset M \times M$ було частковою еквівалентністю на множині M, необхідно і достатньо, щоб виконувалися рівності: $\varepsilon = \varepsilon^{-1} = \varepsilon \circ \varepsilon$, або ж такі включення: $\Delta_{pr\varepsilon} \subset \varepsilon$, $\varepsilon \circ \varepsilon^{-1} \subset \varepsilon$;

г) перетин часткових еквівалентностей на M є частковою еквівалентністю на M;

д) порожнє відношення $\varnothing$ на M є „найменшою“ частковою еквівалентністю на M, а декартів квадрат $M \times M$ — найбільшою;

е) еквівалентність на множині M завжди є частковою еквівалентністю.

13. Введемо означення (часткової) квазіеквівалентності

Означення 5.5.6. *Відношення $\tau \subset M \times M$ називається частковою квазіеквівалентністю (частковою толерантністю) на множині M, якщо τ частково рефлексивне і симетричне, тобто $\Delta_{pr\tau} \subset \tau$ і $\tau \subset \tau^{-1}$, що на елементарному рівні рівносильно відповідно таким співвідношенням:*

$$(\forall a, b \in M)((a, b) \in \tau \to (a; a), (b; b) \in \tau); \tag{5.5.6}$$

$$(\forall a, b \in M)((a; b) \in \tau \to (b; a) \in \tau). \tag{5.5.7}$$

Отже, $\tau \subset M \times M$ — **часткова квазіеквівалентність (часткова толерантність) на множині** $M \overset{df}{\Longleftrightarrow} (\Delta_{\rho r\tau} \subset \tau \wedge \tau \subset \tau^{-1}) \Leftrightarrow ((5.5.6)\wedge\ (5.5.7))$.

Означення 5.5.7. *Відношення $\tau \subset M \times M$ називається квазіеквівалентністю (толерантністю) на множині M, якщо τ рефлексивне і симетричне, тобто $\Delta_M \subset \tau$ і $\tau \subset \tau^{-1}$, що на елементарному рівні рівносильно співвідношенням*

$$(\forall a \in M)((a; a) \in \tau) \tag{5.5.8}$$

і відповідно (5.5.7).

Отже, $\tau \subset M \times M$ — **квазіеквівалентність (толерантність) на множині** $M \overset{df}{\Longleftrightarrow} (\Delta_M \subset \tau \wedge \tau \subset \tau^{-1}) \Leftrightarrow ((5.5.7) \wedge ())$.

В наведених означеннях вжито терміни „квазіеквівалентність" та „толерантність", які відповідно означають „ніби еквівалентність" (в складному слові вжито квазі: від латинського **quasi** — ніби, немовби) та „дружність, приязність" (від латинського **tolerans**).

Відмітимо деякі твердження про часткові квазіеквівалентності та квазіеквівалентності на множині M, які неважко довести, виходячи з відповідних означень:

а) довільна квазіеквівалентність є частковою квазіеквівалентністю;

б) для того, щоб часткова квазіеквівалентність τ була квазіеквівалентністю на множині M, необхідно і достатньо, щоб виконувалась хоча б одна із рівностей: $\Delta_{pr_1\tau} = \Delta_M$, $\Delta_{pr_2\tau} = \Delta_M$, $\Delta_{pr\tau} = \Delta_M$, або, що відповідно теж саме, $pr_1\tau = M$, $pr_2\tau = M$, $pr\tau = M$;

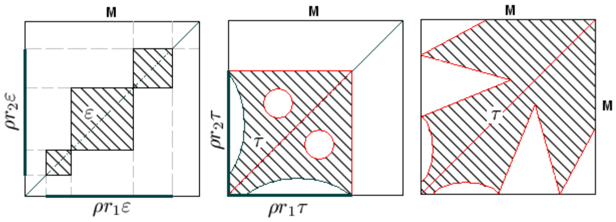
в) довільна часткова еквівалентність на M є частковою квазіеквівалентністю на M;

г) довільна еквівалентність на M є квазіеквівалентністю на M;

д) перетин (об'єднання) часткових квазіеквівалентностей на M є частковою квазіеквівалентністю на M;

е) перетин (об'єднання) квазіеквівалентностей на M є квазіеквівалентністю на M.

14. На діаграмах зображення часткових еквівалентностей, часткових квазіеквівалентностей та квазіеквівалентностей матимуть такий вигляд, як на малюнку 1.42.



ε – часткова еквівалентність

τ – часткова толерантність

τ – толерантність

Мал. 1.42.

15. Приклади часткових еквівалентностей, часткових толерантностей та толерантностей.

1. Відношення подібності прямокутних трикутників на множині T всіх трикутників на площині є часткова еквівалентність на T.

2. Відношення „m і n при діленні на 5 мають однакову остачу, де $m, n \in \mathbb{N}$ — натуральні числа“ є часткова еквівалентність на множині $\mathbb{Z}$ цілих чисел.

3. Відношення „слова a і b із трьох букв мають хоча би одну однакову букву“ є частковою квазіеквівалентністю на множині всіх слів.

4. Відношення „слова a і b мають хоча би одну однакову букву“ є квазіеквівалентністю на множині всіх слів.

5. Відношення „a знайомий з b“ є квазіеквівалентністю на множині всіх студентів інституту.

6. Відношення „відрізки a і b мають хоча б одну спільну точку“ є толерантністю на множині всіх відрізків площини (аналогічно можна розглянути множину всіх відрізків на прямій і т.д.).

5.6 Відношення порядку; впорядкована множина та її особливі елементи; деякі узагальнення

1. На практиці, в житті, при розгляді та дослідженні певних об'єктів їх, як правило, порівнюють між собою, вияснюють, що в них є спільного, а що в них є таке, чим вони різняться між собою. Адже завжди певні об'єкти чимось схожі між собою, а чимось і відмінні. В результаті ми приходимо до **відношень еквівалентності,** завдяки яким ми маємо змогу ототожнювати, не розрізняти певні об'єкти між собою, що часто спрощує і допомагає втілити в життя дослідження цих об'єктів.

Разом з тим в теоретичних і, особливо, в практичних дослідженнях надзвичайно важливу роль відіграє не лише встановлення схожості та відмінності в об'єктах при порівнянні їх між собою, а і уміння їх розмістити в просторі, в часі, говорять, ранжувати їх, встановити їх місце в певній, говорять, ієрархії, в певному порядку. Наприклад, сюди можна віднести і розміщення прізвищ по алфавіту, і встановлення порядку розташування будівель в мікрорайоні, і порівняння деяких об'єктів між особою відносно деякої їх міри (ваги, об'єму, довжини тощо), і встановлення родинного зв'язку, наприклад, „бути нащадком", і з'ясування порядку виконання певних видів робіт і.т.п. . У зв'язку з цим і вводяться поняття **відношення порядку** між елементами певної множини (вдумаємося в спільнокорінні слова „ряд", „порядкувати" тощо). Існує кілька видів відношень порядку. Введемо деякі з них.

2. Введемо загальне означення порядку.

Означення 5.6.1. *Відношення $\omega \subset M \times M$ називається порядком (іноді говорять — предпорядком) на множині M, якщо ω транзитивне і антисиметричне, тобто $\omega \circ \omega \subset \omega$ і $\omega \cap \omega^{-1} \subset \Delta_M$, що на елементарному рівні рівносильно відповідно співвідношенням:*

$$(\forall a, b, c \in M)((a; b) \in \omega \wedge (b; c) \in \omega \to (a; c) \in \omega); \qquad (5.6.1)$$

$$(\forall a, b \in M)((a; b) \in \omega \wedge (b; a) \in \omega \to a = b). \qquad (5.6.2)$$

Отже, $\omega \subset M \times M$ — **порядок (предпорядок) на множині** $M \overset{df}{\Longleftrightarrow} (\omega \circ \omega \subset \omega \wedge \omega \cap \omega^{-1} \subset \Delta_M) \Leftrightarrow ((5.6.1) \wedge ((5.6.2))$.

3. Серед різноманітних порядків на множині в першу чергу виділяють **строгі порядки** і **нестрогі порядки**.

Означення 5.6.2. *Порядок $\omega \subset M \times M$ на множині M називається строгим, якщо він іррефлексивний на M, тобто $\Delta_M \subset \overline{\omega}$, що на елементарному рівні рівносильно співвідношенню*

$$(\forall a \in M)(a; a) \notin \omega. \tag{5.6.3}$$

Отже, **порядок** $\omega \subset M \times M$ **на множині** M **строгий** $\overset{df}{\Longleftrightarrow}$ порядок ω іррефлексивний на $M \Leftrightarrow \Delta_M \subset \overline{\omega} \Leftrightarrow (5.6.3)$.

Означення 5.6.3. *Порядок $\omega \subset M \times M$ на множині M називається нестрогим, якщо він рефлексивний на M, тобто $\Delta_M \subset \omega$, що на елементарному рівні рівносильно співвідношенню*

$$(\forall a \in M)(a; a) \in \omega. \tag{5.6.4}$$

Отже, **порядок** $\omega \subset M \times M$ **на множині** M **нестрогий** $\overset{df}{\Longleftrightarrow}$ порядок ω рефлексивний на $M \Leftrightarrow \Delta_M \subset \omega \Leftrightarrow (5.6.4)$.

4. Очевидно, що між строгим і нестрогим порядками на множині існує тісний взаємозв'язок, а саме:

а) якщо $\omega \subset M \times M$ — строгий порядок на множині M, тоді $\omega \cup \Delta_M$ — нестрогий порядок на множині M.

б) якщо $\omega \subset M \times M$ нестрогий порядок на множині M, тоді $\omega \setminus \Delta_M$ — строгий порядок на множині M.

Із цих двох тверджень випливає, що знаючи один із порядків на множині — строгий чи нестрогий, легко отримати інший із них за рахунок приєднання чи вилучення діагоналі множини.

Відмітимо, що можна показати справедливість таких двох тверджень відносно строгого порядку на заданій множині:

Теорема 5.6.1. *Для того, щоб відношення $\omega \subset M \times M$ було строгим порядком на множині M, необхідно і достатньо, щоб воно було транзитивним та іррефлексивним, тобто: $\omega \circ \omega \subset \omega$ і $\Delta_M \subset \overline{\omega}$, що на елементарному рівні рівносильно співвідношенням (5.6.1) і (5.6.3) відповідно.*

Теорема 5.6.2. *Для того, щоб відношення $\omega \subset M \times M$ було строгим порядком на множині M, необхідно і достатньо, щоб воно було транзитивним і асиметричним, тобто $\omega \circ \omega \subset \omega$ і $\omega \cap \cap\, \omega^{-1} = \varnothing$, що на елементарному рівні рівносильно співвідношенням (1) і відповідно:*

$$(\forall a, b \in M)((a; b) \in \omega \to (b; a) \notin \omega). \tag{5.6.5}$$

Доведення теорем 5.6.1, 5.6.2 **проведіть самостійно.**

5. Серед різних видів порядків на множині важливу роль відіграють так звані лінійні порядки.

Означення 5.6.4. *Порядок $\omega \subset M \times M$ на множині M називається лінійним або досконалим, якщо порядок ω — зв'язне відношення на множині M, тобто виконується рівність: $\omega \cup \omega^{-1} \cup \cup\, \Delta_M = M \times M$, що на елементарному рівні рівносильно співвідношенню*

$$(\forall a, b \in M)((a; b) \in \omega \vee (b; a) \in \omega \vee a = b). \tag{5.6.6}$$

Отже, **порядок** $\omega \subset M \times M$ **на множині** M **лінійний (досконалий)** $\overset{df}{\Longleftrightarrow} \omega \cup \omega^{-1} \cup \Delta_M = M \times M \Leftrightarrow$ (5.6.6).

Означення 5.6.5. *Порядок $\omega \subset M \times M$ на множині M називається нелінійним (недосконалим або, говорять, частковим порядком), якщо порядок ω не є зв'язним відношенням на множині M, тобто $\omega \cup \omega^{-1} \cup \Delta_M \neq M \times M$, що на елементарному рівні рівносильно співвідношенню*

$$(\exists a, b \in M)((a; b) \notin \omega \wedge (b; a) \notin \omega \wedge a \neq b). \tag{5.6.7}$$

Отже, **порядок** $\omega \subset M \times M$ **на множині** M **нелінійний (недосконалий або частковий)** $\overset{df}{\Longleftrightarrow} \omega \cup \omega^{-1} \cup \Delta_M \neq M \times M \Leftrightarrow$ (5.6.7).

З наведених означень робимо висновок про те, що розрізняють строгі порядки — лінійні та нелінійні, і нестрогі порядки — лінійні та нелінійні на якійсь заданій множині.

Зауваження. На числових множинах відношення „менше", „більше" прийнято позначати $<, >$, а відношення „не більше", „не менше"— відповідно $\leqslant, \geqslant$.

6. Приклади.

1. На довільній числовій множині відношення $<, >$ є строгими лінійними порядками, а відношення $\leqslant, \geqslant$ — нестрогими лінійними порядками.

2. Відношення включення $\subset$ на множині $\mathfrak{P}(M) \overset{df}{=} \{A|A \subset M\}$ всіх підмножин множини M, яка має більше одного елемента, є нелінійним нестрогим порядком.

3. Відношення розташування слів в словнику, яке називається **лексикографічним порядком**, є лінійним строгим порядком на множині всіх слів, розміщених по алфавіту в словнику (без врахування слів — омонімів).

4. Відношення подільності на множині $\mathbb{N}$ всіх натуральних чисел є нелінійним нестрогим порядком; цікаво, що відношення подільності на множині $\mathbb{Z}$ всіх цілих чисел не є відношенням порядку (поясніть самостійно, чому це так).

5. Відношення „бути молодшим по віку“, „бути старшим по віку“, „бути нащадком“ є відношеннями лінійного строгого порядку на множині людей (якщо не враховувати ровесників).

7. Легко показати, що для порядків на заданій множині мають місце такі твердження:

1) якщо $\omega \subset M \times M$ — порядок певного виду на множині M, то і обернене відношення $\omega^{-1} \subset M \times M$ є теж порядком того ж самого виду на цій множині, який називають оберненим до даного порядку;

2) якщо $\omega_1, \omega_2 \subset M \times M$ — порядки одного і того ж виду на множині M, то перетин $\omega_1 \cap \omega_2 \subset M \times M$ цих порядків є теж порядком того ж самого виду на цій множині (без врахування їх лінійності).

8. Пару виду $(M; \omega)$, де $\omega \subset M \times M$ — порядок певного виду на множині M, називають **впорядкованою цим порядком** ω **множиною.**

Зрозуміло, що на одній і тій же множині можна задавати різні порядки. В зв’язку з цим утворюватиметься по-іншому впорядкована ця ж сама множина, тобто на одній множині можемо утворювати по-різному впорядковані множини (подібне маємо, наприклад, з множиною $\mathbb{N}$ натуральних чисел, на якій можемо задавати різні операції над числами).

В зв'язку з різними назвами для порядків отримуватимемо і відповідно різні назви для впорядкованої множини.

Приклади впорядкованих множин.

1) $(\mathfrak{P}(M); \subset)$ — нелінійно нестрого впорядкована множина $\mathfrak{P}(M)$ всіх підмножин множини M по включенню $\subset$ цих підмножин.

2) $(\mathbb{N}; <)$ — лінійно строго впорядкована множина всіх натуральних чисел відносно порядку „менше".

3) $(\mathbb{N}; \vdots)$ — нелінійно нестрого впорядкована множина $\mathbb{N}$ всіх натуральних чисел по відношенню подільності чисел.

4) $(\mathbb{Z}; \leqslant)$ — лінійно нестрого впорядкована множина всіх цілих чисел по відношенню „не більше".

5) $(\mathbb{R}; <)$ — лінійно строго впорядкована множина $\mathbb{R}$ всіх дійсних чисел відносно порядку „менше".

9. Нехай $X \subset M$ — непорожня підмножина впорядкованої множини $(M; \omega)$, а $\omega_X = \omega \cap (X \times X)$ — обмеження порядку ω на підмножину $X \subset M$, яке очевидно є порядком того ж самого виду на множині X, що і порядок ω на множині M. У результаті отримаємо впорядковану підмножину $(X; \omega_X)$ впорядкованої множини $(M; \omega)$ того ж самого виду. Отримана впорядкована підмножина теж називається **обмеженням впорядкованої множини** $(M; \omega)$ **на підмножину** X.

У розглянутих вище прикладах очевидно, що впорядкована множина $(\mathbb{N}; <)$ є обмеженням впорядкованої множини $(\mathbb{R}; <)$ всіх дійсних чисел відносно порядку „менше" на множину $\mathbb{N}$ всіх натуральних чисел. Обидві ці множини є лінійно строго впорядкованими множинами.

10. Нехай $(M; \omega)$ — довільна впорядкована множина. Розглянемо деякі особливі елементи та підмножини цієї множини.

Нехай $X \subset M$ — довільна непорожня підмножина цієї впорядкованої множини.

Означення 5.6.6. *Елемент $a \in M$ називається* ***мажорантою підмножини*** *X, якщо $(x; a) \in \omega$ для будь-якого $x \in X$, і називається* ***мінорантою цієї підмножини*** *X, якщо $(a; x) \in \omega$*

для будь-якого $x \in X$.

Позначимо через $Maj(X)$ множину всіх мажорант підмножини $X \subset M$, а через $Min(X)$ — множину всіх мінорант цієї підмножини $X \subset M$ відносно порядку ω на множині M. Легко бачити, що для цих множин $Maj(X)$, $Min(X)$ виконуються рівності:

$$Maj(X) = \bigcap_{x \in X} \omega\langle x \rangle;$$

$$Min(X) = \bigcap_{x \in X} \omega^{-1}\langle x \rangle.$$

Означення 5.6.7. *Елемент* $a \in X$ *називається найбільшим елементом цієї підмножини* $X \subset M$ *відносно порядку* ω, *якщо він є мажорантою підмножини* $X \setminus \{a\}$, *і називається найменшим її елементом, якщо він є мінорантою підмножини* $X \setminus \{a\}$.

Отже, маємо:

$a \in X$ — **найбільший елемент підмножини** $X \subset M$ відносно порядку $\omega \overset{df}{\Longleftrightarrow} a \in X \wedge a \in \bigcap\limits_{x \in X \setminus \{a\}} \omega\langle x \rangle$;

$a \in X$ — найменший елемент підмножини $X \subset M$ відносно порядку $\omega \overset{df}{\Longleftrightarrow} a \in X \wedge a \in \bigcap\limits_{x \in X \setminus \{a\}} \omega^{-1}\langle x \rangle$.

Означення 5.6.8. *Елемент* a *називається точною верхньою гранню підмножини* $X \subset M$ *відносно порядку* ω *та позначається* $sup(X)$, *якщо він є найменшою мажорантою цієї підмножини* X, *і називається точною нижньою гранню цієї підмножини* X *та позначається* $inf(X)$, *якщо він є найбільшою мінорантою підмножини* X.

Отже, маємо:

$a \overset{df}{=} sup(X)$ — **точна верхня грань підмножини** $X \subset M$ відносно порядку $\omega \overset{df}{\Longleftrightarrow} a \in Maj(X) \wedge a \in \bigcap\limits_{x \in Maj(X) \setminus \{a\}} \omega^{-1}\langle x \rangle$;

$a \overset{df}{=} inf(X)$ — **точна нижня грань підмножини** $X \subset M$ відносно порядку $\omega \overset{df}{\Longleftrightarrow} a \in Min(X) \wedge a \in \bigcap\limits_{x \in Min(X) \setminus \{a\}} \omega\langle x \rangle$.

Відмітимо, що позначення sup, inf — це скорочення відповідно латинських слів **supremun** (найвищий) та **infimum** (найнижчий).

Означення 5.6.9. *Елемент $a \in X$ називається максимальним елементом цієї підмножини $X \subset M$ відносно порядку ω, якщо для довільного елемента $x \in X$ такого, що $x \neq a$, виконується умова: $(a; x) \notin \omega$, і називається мінімальним елементом цієї підмножини $X \subset M$, якщо для довільного елемента $x \in X$ такого, що $x \neq a$, виконується умова: $(x; a) \notin \omega$.*

Отже, маємо:

a — **максимальний елемент підмножини** $X \subset M$ **відносно порядку** $\omega \overset{df}{\Leftrightarrow} (\omega\langle a\rangle \cap X) \setminus \{a\} = \varnothing \Leftrightarrow (\forall x \in X)((a; x) \in \omega \to a = x)$;

a — **мінімальний елемент підмножини** $X \subset M$ **відносно порядку** $\omega \overset{df}{\Leftrightarrow} (\omega^{-1}\langle a\rangle \cap X) \setminus \{a\} = \varnothing \Leftrightarrow (\forall x \in X)((x; a) \in \omega \to a = x)$.

11. Отже, нами введено три пари близьких по співзвучності і смислу особливих елементів для заданої підмножини $X \subset M$ деякої впорядкованої множини $(M; \omega)$: **найбільший і найменший елементи X, точна верхня грань** — $sup(X)$ **і точна нижня грань** — $inf(X)$ **для X, максимальний і мінімальний елементи X.**

Безперечно, що між ними існують, виходячи з означень, певні зв'язки. Відмітимо їх у вигляді наступних тверджень, доведення яких пропонуємо провести самостійно:

1) якщо для заданої підмножини існує найбільший (найменший) елемент, то він єдиний;

2) якщо для заданої підмножини існує найбільший (найменший) елемент, то він є одночасно і максимальним (мінімальним) елементом цієї підмножини;

3) якщо для заданої підмножини існує точна верхня (нижня) грань, то вона єдина;

4) для заданої підмножини максимальних (мінімальних) елементів може існувати довільна кількість;

5) точна верхня (нижня) грань даної підмножини співпадає з її найбільшим (найменшим) елементом, тоді і тільки тоді, коли вона належить цій підмножині.

12. Приклади особливих елементів для впорядкованих підмножин.

1. $X = [4; 9) = \{x \in \mathbb{R} | 4 \leqslant x < 9\} \subset \mathbb{R}$ — напіввідрізок впорядкованої множини $(\mathbb{R}; \leqslant)$ дійсних чисел відношенням „не більше“. Легко встановити, що 4 є одночасно найменшим елементом множини X таким, що $4 = inf(X)$, тобто співпадає з точною нижньою гранню X. Очевидно, що $9 = sup(X)$ — точна верхня грань X, і ця множина X не має найбільшого елемента. Отже, очевидно, що 4 є мінімальним елементом X, а максимального елемента X немає. Очевидно також, що $Maj(X) = [9; +\infty)$ — множина всіх мажорант X, а $Min(X) = (-\infty; 4]$ — множина всіх мінорант підмножини $X = [4; 9) \subset \mathbb{R}$.

2. $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ — підмножина впорядкованої множини $(\mathbb{N}; \vdots)$ натуральних чисел з відношенням подільності $\vdots$, яке, як ми знаємо, є нелінійним нестрогим порядком. Легко бачити, що 1 є одночасно і найбільшим елементом, і максимальним елементом, і точною верхньою гранню даної підмножини X. Ця підмножина має три мінімальні елементи: $4, 5, 6$ і не має найменшого елемента. Очевидно, що $inf(X) = 60$ — це точна нижня грань даної множини X; вона є найменшим спільним кратним. Очевидно, що $Maj(X) = \{1\}$ — множина всіх мажорант X, тобто всіх спільних дільників X, а $Min(X) = \{60n | n \in N\} = \{60, 120, 180, 240, ..., 60n, ...\}$ — множина всіх спільних кратних множини X.

13. Нехай $(M; \omega)$ — впорядкована множина. На ній можна розглядати проміжки, які є узагальненнями відомих понять проміжків, інтервалів, напівінтервалів, відрізків, які вводяться на відомих з шкільної математики числових множинах.

Означення 5.6.10. *Інтервалом* $(a; b)$ *з кінцями* $a, b \in M$*, де* $(a; b) \in \omega$*,* $a \neq b$ *називається множина всіх таких елементів* $x \in \in M$ *з множини* M*, які відмінні від кінців* a, b *цього інтервалу і задовольняють умову:* $((a; x) \in \omega \wedge (x; b) \in \omega)$.

Отже, (a, b) — **інтервал з кінцями на впорядкованій множині** $(M; \omega) \overset{df}{\Longleftrightarrow} a, b \in M \wedge a \neq b \wedge (a, b) \in \omega \wedge (a; b) = \{x | x \neq a \wedge x \neq \neq b \wedge (a; x) \in \omega \wedge (x; b) \in \omega\}$.

Означення 5.6.11. *Сегментом* $[a;b]$ *(або відрізком) з кінцями* $a, b \in M$*, де* $(a;b) \in \omega$*,* $a \neq b$*, називається об'єднання* $[a;b] = (a;b) \cup \cup \{a, b\}$ *відповідного йому інтервала* $(a;b)$ *з його кінцями* a, b*.*

Отже, $[a;b]$ **— сегмент (відрізок) з кінцями** a, b **на впорядкованій множині** $(M;\omega) \overset{df}{\Longleftrightarrow} [a;b] \overset{df}{=} (a;b) \cup \{a, b\}$.

Напівінтервали (напіввідрізки) $[a;b)$ чи $(a;b]$ відрізняються від відповідного інтервала $(a;b)$ тим, що до цього інтервала приєднуються відповідно лівий чи правий його кінець.

Приклади.

1. На впорядкованій множині $(\mathbb{R};<)$ дійсних чисел з відношенням „менше“ маємо:

$(3;8) = \{x | 3 < x \wedge x < 8\}$ — інтервал з кінцями 3, 8;

$[4;10] = (4;10) \cup \{4, 10\}$ — відрізок з кінцями 4, 10;

$(2;9] = (2;9) \cup \{9\}$ — напівінтервал з кінцями 2, 9.

2. На впорядкованій множині $(\mathbb{N};\vdots)$ натуральних чисел з відношенням подільності „$\vdots$“ маємо:

$(12;2) = \{k | 12 \vdots k \wedge k \vdots 2\} = \{6, 4\}$ — інтервал з кінцями 12, 2;

$(40;4] = (40;4] \cup \{4\} = \{20, 8, 4\}$ — напівінтервал з кінцями 40, 4;

$(4;3) = \varnothing$ — порожній інтервал.

Зауваження. Іноді на впорядкованій множині $(M;\omega)$ вводять поняття **сусідніх** елементів.

Означення 5.6.12. *Елементи* $a, b \in M$ *називаються сусідніми, якщо це різні елементи, тобто* $a \neq b$*, і, наприклад, такі, що* $(a;b) \in \omega$*, і не існує елемента* $x \in M$*, відмінного від* a, b*, щоб виконувалася умова:* $(a < x \wedge x < b)$*.*

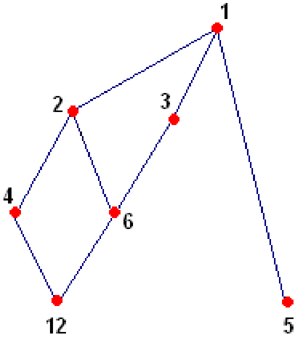
Отже, $a, b \in M$ — **сусідні елементи впорядкованої множини** $(M;\omega) \overset{df}{\Longleftrightarrow} (a \neq b \wedge (a;b) \in \omega \wedge \overline{(\exists x \in M)(x \neq a, b \wedge a < x \wedge x < b)})$.

Наприклад, на впорядкованій множині $(\mathbb{R};<)$ дійсних чисел немає сусідніх елементів, а на впорядкованій множині $(\mathbb{N};\vdots)$ сусідніми елементами є хоча би такі пари елементів, як 4 і 2, або 20 і 10 і т. д.

14. Для наочного зображення впорядкованих множин іноді використовують спеціальні графи, які називають **діаграмами Хассе**. Діаграма Хассе для скінченної впорядкованої множини будується так. Кожен елемент множини зображується точкою (кружечком) на площині. При цьому, якщо $(a; b) \in \omega$, де $a, b \in M$ — різні елементи множини M, то точка, що відповідає елементу a, розташовується нижче точки, яка відповідає елементу b, і ці точки з'єднують між собою дугою (говорять, ребром), якщо вони сусідні між собою.

Приклад. Побудувати діаграму Хассе для впорядкованої множини $(M; \vdots)$ де $\vdots$ — відношення подільності на множині $M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 12\}$.

Розв'язання. Використавши принцип побудови діаграми Хассе для заданої впорядкованої множини, отримаємо таке її зображення (див. малюнок 1.43).



Мал. 1.43.

На діаграмі Хассе краще зрозуміти структуру побудови впорядкованої множини, якими особливими елементами володіє ця впорядкована множина. Так, на наведеній діаграмі легко бачити, що 1 є одночасно і найбільшим елементом, і максимальним елементом, і точною верхньою гранню даної множини, а 12 і 5 є її мінімальними елементами. Очевидно, що точною нижньою гранню даної множини є число 60, яке не належить цій множині. Найменшого елемента ця множина не має.

Зауважимо, що лінійно впорядкована множина часто називається **ланцюгом.** І це не випадково, оскільки її зображення у вигляді діаграми Хассе матиме вигляд ланцюга. При цьому, якщо така множина має найменший чи найбільший елемент, то відповідний ланцюг матиме початок чи кінець; в противному випадку не буде ні початку, ні кінця ланцюга.

Наприклад, діаграма Хассе для лінійно впорядкованої множини натуральних чисел з відношенням „менше“ матиме вигляд нескінченного ланцюга з початковим елементом 1, а для лінійно впорядкованої множини $(\mathbb{Z}; \leqslant)$ цілих чисел з відношенням „не більше“— вигляд нескінченного ланцюга, який не має ні початку, ні кінця.

15. Серед впорядкованих множин важливу роль відіграють так звані цілком впорядковані множини.

Означення 5.6.13. *Впорядкована множина $(M; \omega)$ називається цілком впорядкованою, якщо довільна непорожня її підмножина має найменший елемент.*

Прикладом такої цілком впорядкованої множини є множина $(\mathbb{N}; <)$ натуральних чисел з відношенням „менше“.

Можна показати, що в цілком впорядкованій множині $(M; \omega)$ для кожного елемента існує безпосередньо наступний за ним (сусідній) по відношенню ω. А це вказує на те, що до таких множин **можна використовувати індукцію,** яка є узагальненням математичної індукції, що застосовується для натуральних чисел.

Відмітимо, що індукцію можна використовувати і до таких впорядкованих множин, які володіють **умовою мінімальності,** що рівносильно тому, що всі її ланцюги (тобто лінійно впорядковані підмножини) цілком впорядковані.

16. Обмежимося надалі лише введенням відповідних означень для такого важливого класу впорядкованих множин, які називаються **решітками, напіврешітками, повними решітками** і які знайшли різноманітні застосування.

Означення 5.6.14. *Впорядкована множина $(M; \omega)$ називається мажорантною (або верхньою) решіткою, якщо виконується* *співвідношення:*

$$(\forall a,b\in M)(\exists sup(\{a,b\})\in M).$$

Означення 5.6.15. *Впорядкована множина $(M;\omega)$ називається мінорантною (або нижньою) решіткою, якщо виконується співвідношення:*

$$(\forall a,b\in M)(\exists inf(\{a,b\})\in M).$$

Означення 5.6.16. *Впорядкована множина $(M;\omega)$ називається решіткою, якщо вона є одночасно і верхньою (мажорантною), і нижньою (мінорантною) решіткою.*

Очевидно, що лінійно впорядкована множина $(M;\omega)$ є решіткою. Дійсно, для довільних елементів $a,b\in M$ маємо:

якщо $a=b$, то $sup(\{a,b\})=inf(\{a,b\})=a=b$;

якщо $a\neq b$ і, наприклад, $(a;b)\in\omega$, то $sup(\{a,b\})=b$; $inf(\{a,b\})=a$.

Приклади.

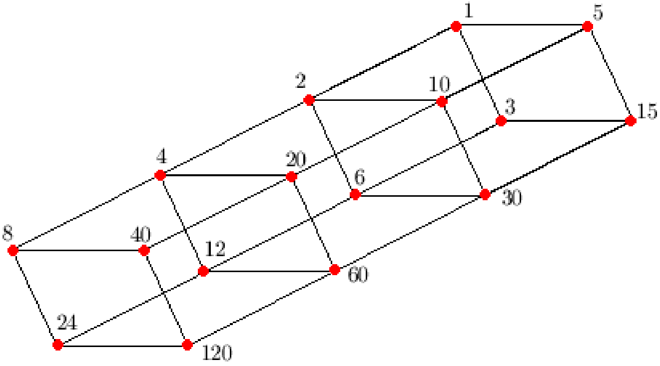
1. Впорядкована множина $(\mathfrak{P}(M);\subset)$ всіх підмножин множини M відносно включення $\subset$ є решіткою. Дійсно, для довільних підмножин $A,B\subset M$ маємо: $sup(\{A,B\})=A\cup B$; $inf(\{A,B\})= =A\cap B$.

2. Впорядкована множина $(\mathbb{N};\vdots)$ натуральних чисел по відношенню подільності $\vdots$ є решіткою. Дійсно, для довільних натуральних чисел $m,n\in\mathbb{N}$ маємо: $sup(\{m,n\})=HCD(m;n)$; $inf(\{m,n\})= HCK(m;n)$.

3. Впорядкована множина $(M;\vdots)$, де $M= =\{1,2,3,4,5,6,8,10,12,15,20,24,30,40,60,120\}$, є решіткою. Для наглядності побудуємо діаграму Хассе, за допомогою якої легко встановити значення для $sup(\{m,n\})$, $inf(\{m,n\})$ для довільних $m,n\in M$ (див. малюнок 1.44).

Наприклад, $sup(\{24,40\})=8$, $inf(\{24,40\})=120$ або $sup(\{12,30\})=6$, $inf(\{12,30\})=60$ і т. п.

Зауваження. Якщо звернути увагу на зовнішній вигляд зображення діаграм Хассе для решітки, то дійсно маємо аналогію цього зображення з зображенням решітки як деякого матеріального об'єкта з повсякденного життя.



Мал. 1.44.

Означення 5.6.17. *Впорядкована множина* $(M;\omega)$ *називається повною мажорантною (або повною верхньою) решіткою, якщо довільна її непорожня підмножина володіє точною верхньою гранню, тобто виконується співвідношення:*

$$(\forall A \subset M)(A \neq \varnothing \to (\exists sup(A) \in M)).$$

Означення 5.6.18. *Впорядкована множина* $(M;\omega)$ *називається повною мінорантною (або повною нижньою) решіткою, якщо довільна її непорожня підмножина володіє точною нижньою гранню, тобто виконуються співвідношення:*

$$(\forall A \subset M)(A \neq \varnothing \to (\exists inf(A) \in M)).$$

Означення 5.6.19. *Впорядкована множина* $(M;\omega)$ *називається повною решіткою, якщо вона є одночасно і повною верхньою, і повною нижньою решіткою.*

Очевидно, що повна верхня, повна нижня та повна решітки є, очевидно, відповідно верхньою, нижньою та одночасно верхньою і нижньою решітками.

Легко бачити, що впорядкована множина $(\mathfrak{P}(M);\subset)$ всіх підмножин множини M відносно включення $\subset$ є повною решіткою, оскільки для довільної сукупності $S_I = \{A_i \subset M | i \in I\} \subset \mathfrak{P}(M)$ підмножин множини M маємо: $sup(S_I) = \bigcup_{i \in I} A_i$; $inf(S_I) = \bigcap_{i \in I} A_i$.

17. Введемо означення двох відношень, важливих для практики, які є узагальненнями деяких відношень порядку.

Означення 5.6.20. *Відношення $\rho \subset M \times M$ називається квазіпорядком на множині M, якщо ρ — рефлексивне і транзитивне відношення на цій множині, тобто: $\Delta_M \subset \rho$ і $\rho \circ \rho \subset \rho$, що на елементарному рівні рівносильно відповідно співвідношенням:*

$$(\forall a \in M)\,((a; a) \in \rho) \tag{5.6.8}$$

$$(\forall a, b, c \in M)((a; b) \in \rho \wedge (b; c) \in \rho \to (a; c) \in \rho). \tag{5.6.9}$$

Отже, $\rho \subset M \times M$ — **квазіпорядок на множині** $M \overset{df}{\Leftrightarrow} (\Delta_M \subset \subset \rho \wedge \rho \circ \rho \subset \rho) \Leftrightarrow ((5.6.8) \wedge (5.6.9))$.

Можна показати, що для квазіпорядків на множині мають місце такі твердження:

1) відношення, обернене до квазіпорядку на заданій множині, є квазіпорядком на цій множині;

2) перетин квазіпорядків на заданій множині є квазіпорядком на цій множині;

3) для того, щоб добутки $\rho_2 \circ \rho_1$, $\rho_1 \circ \rho_2$ двох квазіпорядків на множині M були квазіпорядками на цій множині, необхідно і достатньо, щоб виконувалась рівність: $\rho_2 \circ \rho_1 = \rho_1 \circ \rho_2$, або ж рівності $\rho_1 \circ \rho_2 \circ \rho_1 = \rho_2 \circ \rho_1$, $\rho_2 \circ \rho_1 \circ \rho_2 = \rho_2 \circ \rho_1$;

4) для того щоб об'єднання квазіпорядків на заданій множині було квазіпорядком на цій множині, необхідно і достатньо, щоб це об'єднання співпадало з їх добутками;

5) довільний нестрогий порядок чи довільна еквівалентність на заданій множині є квазіпорядком на цій множині;

6) для того, щоб квазіпорядок ρ на заданій множині M був нестрогим порядком, необхідно і достатньо, щоб виконувалася рівність $\varepsilon_\rho = \Delta_M$, де $\varepsilon_\rho \overset{df}{=} \rho \cap \rho^{-1}$.

7) для того, щоб квазіпорядок ρ на заданій множині M був еквівалентністю, необхідно і достатньо щоб виконувалася рівність $\rho^{-1} = \rho$.

Досить цікавою, на наш погляд, є наступна теорема:

Теорема 5.6.3. *Якщо ρ — квазіпорядок на множині M, то відношення $\varepsilon_\rho = \rho \cap \rho^{-1}$ на цій множині M є такою еквівалентністю, що пара $(M/\varepsilon_\rho; \omega_\rho)$ є нестрого впорядкованою множиною, у якій відношення $\omega_\rho \overset{df}{=} \{(\varepsilon_\rho\langle a\rangle; \varepsilon_\rho\langle b\rangle) | (a; b) \in \rho\}$ є нестрогим порядком на фактор-множині M/ε_ρ по еквівалентності ε_ρ.*

Доведення теореми проведіть самостійно.

Цікавість даної теореми, а заодно і відмічених вище тверджень 5.6.5, 5.6.6, 5.6.7, полягає в тому, що, здавалося б, між неблизькими поняттями — еквівалентностями та порядками, перше з яких узагальнює поняття рівності, схожості об'єктів, а друге дає можливість розрізняти ці об'єкти та розташовувати в певному порядку, дотримуючись певної ієрархії, першочерговості в їх розташуванні, насправді також існує і певний внутрішній взаємозв'язок між ними. До речі, це підтверджується і на прикладах з практики.

Приклади.

1. Відношення ρ подільності $\vdots$ на множині $\mathbb{Z}$ цілих чисел є квазіпорядком на цій множині, але не є нестрогим порядком (наприклад: $6 \vdots (-6)$ і $(-6 \vdots 6)$, але $6 \neq -6$).

2. Відношення „не більше“ $\leqslant$ між довжинами векторів, які належать деякій множині V, є квазіпорядком на цій множині.

3. Відношення $\mu =$„$m(a) \leqslant m(b)$“, де $m(x)$ — міра елемента $x \in M$ з певної множини M деяких об'єктів, є квазіпорядком на цій множині (під мірою можна розуміти і певні розміри, і вагу, і температуру, і вік, і тиск, і т. п.).

Означення 5.6.21. *Пара $(M; \rho)$, де ρ — квазіпорядок на множині M, називається* ***квазівпорядкованою множиною****.*

Означення 5.6.22. *Квазіпорядок ρ називається лінійним на множині M, якщо цей квазіпорядок є зв'язним відношенням на цій множині, тобто виконується рівність: $\rho \cup \rho^{-1} = M \times M$, що на елементарному рівні рівносильно співвідношенню*

$$(\forall a, b \in M)((a; b) \notin \rho \to (b; a) \in \rho).$$

З наведених вище трьох прикладів квазіпорядків перший приклад є прикладом нелінійного квазіпорядку, а в другому і третьому прикладах квазіпорядки лінійні.

На основі наведеної вище теореми 5.6.3 і наведених трьох прикладів маємо такі **очевидні твердження**:

1) пара $(Z/\varepsilon_\rho; \omega_\rho)$ є нелінійно нестрого впорядкованою множиною класів чисел виду $\{m, -m\}$, де $m \in \mathbb{Z}$;

2) пара $(V/\varepsilon_\rho; \omega_\rho)$ є лінійно нестрого впорядкованою множиною класів векторів виду $\varepsilon_\rho\langle\vec{a}\rangle = \{\vec{b} | |\vec{a}| = |\vec{b}|\}$, де $|\vec{x}|$ — довжина вектора $\vec{x} \in V$;

3) пара $(M/\varepsilon_\mu; \omega_\mu)$, де $\varepsilon_\mu = \mu \cap \mu^{-1}$, є лінійно нестрого впорядкованою множиною класів об'єктів з множини M виду $\varepsilon_\mu\langle a\rangle = \{b|\mu(a) = \mu(b)\}$, де $\mu(c)$ — міра об'єкта $c \in M$.

18. Важливим для практики є і так зване відношення домінування, яке є узагальненням строгого лінійного порядку на деякій множині (від латинського **dominate** — переважати, панувати, підноситися).

Означення 5.6.23. *Відношення $\delta \subset M \times M$ називається домінуванням на множині M, якщо δ — іррефлексивне, антисиметричне і зв'язне відношення на множині M, тобто виконуються умови $\Delta_M \subset \overline{\delta}$, $\delta \cap \delta^{-1} \subset \Delta_M$, $\delta \cup \delta^{-1} \cup \Delta_M = M \times M$, що на елементарному рівні рівносильно співвідношенням:*

$$(\forall a \in M)((a;a) \notin \delta); \tag{5.6.10}$$

$$(\forall a, b \in M)((a;b) \in \delta \wedge (b;a) \in \delta \to a = b); \tag{5.6.11}$$

$$(\forall a, b \in M)((a;b) \in \delta \vee (b;a) \in \delta \vee a = b). \tag{5.6.12}$$

Отже, $\delta \subset M \times M$ — **домінування на множині** $M \overset{df}{\Longleftrightarrow} \Delta_M \subset \subset \overline{\delta} \wedge \delta \cap \delta^{-1} \subset \Delta_M \wedge \delta \cup \delta^{-1} \cup \Delta_M = M \times M \Leftrightarrow ((5.6.10)\wedge (5.6.11)\wedge (5.6.12))$.

Можна показати, що для відношень домінування на заданій множині мають місце такі **твердження**:

1) для того, щоб $\delta \subset M \times M$ було домінуванням на множині M, необхідно і достатньо, щоб δ було асиметричним і зв'язним відношенням на множині M, тобто: $\delta \cap \delta^{-1} = \varnothing$ і $\delta \cup \delta^{-1} \cup \Delta_M = M \times M$, що на елементарному рівні рівносильне співвідношенням:

$$(\forall a, b \in M)((a;b) \in \delta \to (b;a) \notin \delta); \tag{5.6.13}$$

і відповідно (5.6.12);

2) для того, щоб $\delta \subset M \times M$ було домінуванням на множині M, необхідно і достатньо, щоб виконувалися рівності: $\delta \cap \delta^{-1} = \varnothing$, $\overline{\delta} \cap \overline{\delta^{-1}} = \Delta_M$, що на елементарному рівні рівносильне одному із співвідношень:

$$(\forall a, b \in M)((a \neq b \wedge ((a;b) \in \delta \leftrightarrow (b;a) \notin \delta))\vee \\ \vee(a = b \wedge (a;b) \notin \delta \wedge (b;a) \notin \delta)); \tag{5.6.14}$$

$$(\forall a, b \in M)(((a;b) \in \delta \wedge (a \neq b \leftrightarrow (b;a) \in \delta))\vee \\ \vee(a \neq b \wedge (a;b) \in \delta \wedge (b;a) \notin \delta)); \tag{5.6.15}$$

Зауважимо, що домінування не є обов'язково транзитивним відношенням на заданій множині.

І це **підтверджують** різноманітні **приклади з практики**. Дійсно, при розгляді тих чи інших змагань, ми часто маємо справу з відношенням домінування на множині команд, множині людей, які **змагаються попарно між собою до повної перемоги (без нічиїх розглядатимемо змагання).** Це і **кругові змагання** з волейболу, з баскетболу, з футболу, з шахів, з боксу тощо (під круговим змаганням розуміють такі, в яких кожен грає з кожним, причому до повної перемоги). В результаті таких змагань виявляють переможців, лідерів, аутсайдерів. Для їх виявлення враховують і кількість перемог, і кількість поразок, і кількість набраних очок, балів, штрафів тощо.

Ще раз звертаємо увагу, на те, що розглядаються змагання без нічиїх, — коли в кожній окремій грі один виграє, а другий програє. У зв'язку з цим пропонуємо ввести відношення домінування так, щоб можна було враховувати і такі змагання, в яких допускається змагання без перемоги і поразки, тобто нічия. Подумайте над цим самостійно.

5.7 Однозначні відношення та їх види, зв'язок з еквівалентністю; деякі узагальнення

1. Поняття функції, відображення, однозначної відповідності, перетворення є одним із фундаментальних математичних понять, які безпосередньо зв'язані з реальною дійсністю, а тому мають широкі застосування в практиці.

Як було відмічено раніше, **ідея єдності всіх математичних наук пронизувала дослідження математиків Бурбакі завдяки тому, що у побудову всієї математики була покладена теоретико-множинна основа.** Тому не випадково поняття функції, функціональної залежності є центральним поняттям всієї математики. Адже поняття функції можна трактувати як особливе відношення, як відповідність, що встановлюється між елементами певних множин (або навіть однієї множини). До речі, поняття функції тепер пронизує і всю шкільну математику та інтенсивно вивчається та використовується учнями як в алгебрі, так і в геометрії.

2. Введемо наступне означення функції.

Означення 5.7.1. *Бінарне відношення $f \subset X \times Y$ називається функцією (або однозначним відношенням, однозначною відповідністю між елементами множин X і Y), яка задана в множині X і приймає значення в множині Y, якщо кожен елемент множини X знаходиться у відношенні f не більше ніж з одним елементом множини Y, що на елементарному рівні рівносильно співвідношенню:*

$$(\forall x \in X; y_1, y_2 \in Y)((x; y_1) \in f \wedge (x; y_2) \in f \to y_1 = y_2). (5.7.1)$$

Отже, маємо: $f \subset X \times X$ — **функція, що задана в множині** X **і приймає значення в** $Y \overset{df}{\Longleftrightarrow}$ (5.7.1).

Зауважимо, що функції далі позначатимемо малими латинськими буквами (іноді з індексами): $f, g, h, ..., f_1, g_1, h_1, ...$

Область визначення і **множину (область) значень функції** $f \subset X \times Y$ позначатимемо через $D(f)$ і відповідно $E(f)$. Отже, маємо:

$$D(f) \overset{df}{=} \rho r_1 f = \{x \in X | (\exists y \in Y)(x; y) \in f\} \subset X;$$

$$E(f) \overset{df}{=} \rho r_2 f = \{y \in Y | (\exists x \in X)(x; y) \in f\} \subset Y.$$

Часто змінна $x \in D(f)$ **називається незалежною змінною або аргументом,** а $y \in E(f)$ — **залежною змінною або значенням функції** $f \subset A \times B$.

Очевидно, що коли $x \in D(f)$ і $(x;y) \in f$, то зріз $f\langle x\rangle$ функції f по елементу є одноелементною множиною, тобто $f\langle x\rangle = \{y\}$. В зв'язку з цим для функції вживається загальноприйняте позначення:

$$y \overset{df}{=} f(x), \tag{5.7.2}$$

яке використовується як в шкільній, так і у вузівській математиці, де f вказує на функціональний зв'язок між незалежною змінною x і залежною змінною y.

Слова „однозначне", „однозначна" в назвах „однозначне відношення", „однозначна відповідність" вжиті у зв'язку з означенням, що наведено для функції. Це означення іншими словами можна було б виразити і так:

Означення 5.7.2. *Бінарне відношення $f \subset X \times Y$ називається функцією, якщо для довільного елемента $x \in D(f) \subset X$ існує єдиний елемент $y \in E(f) \subset Y$ такий, що $(x;y) \in f$, тобто $(\forall x \in D(f) \subset X)(\exists y \in E(f) \subset Y) f\langle x\rangle = \{y\}$.*

Звідси стає зрозумілим, що для функції $f \subset X \times Y$ довільним її зрізом по елементу $x \in X$ є порожня множина, тобто $f\langle x\rangle = \varnothing$, якщо $x \notin D(f)$, і є одноелементною множиною, тобто $f\langle x\rangle = \{y\}$ для деякого $y \in Y$ такого, що $(x;y) \in f$, звідки, в силу позначення (5.7.2), маємо рівність $y = f(x)$.

3. Прийнятий вище теоретико-множинний підхід для тлумачення функції приводить нас до такого означення рівності функцій:

Означення 5.7.3. *Функції $f, g \subset X \times Y$, вважаються рівними між собою, якщо їх області визначення співпадають між собою, тобто: $D(f) = D(g) \subset X$, і виконується співвідношення:*

$$(\forall x \in D(f))(f(x) = g(x)),$$

що рівносильно умові: $(\forall x \in X, y \in Y)((x;y) \in f \leftrightarrow (x;y) \in g)$, або ж умові: $(\forall x \in X)(f\langle x\rangle = g\langle x\rangle)$.

Крім поняття рівності функції іноді розглядаються поняття **обмеження** та **розширення однієї функції відносно іншої функції**.

Означення 5.7.4. *Якщо $f, g \subset X \times Y$ — функції, то функція f називається обмеженням (звуженням) функції g, і одночасно функція g називається розширенням (продовженням) функції f, якщо виконується включення $f \subset g$, яке на елементарному рівні рівносильне співвідношенню:*

$$(\forall x \in X, y \in Y)((x; y) \in f \to (x; y) \in g).$$

Звідси випливає таке твердження: Функція $g \subset X \times Y$ є продовженням функції $f \subset X \times Y$ тоді і тільки тоді, коли $D(f) \subset D(g)$ і $(\forall x \in D(f))(g(x) = f(x))$.

4. Введемо означення повної і неповної функцій

Означення 5.7.5. *Функція $f \subset X \times Y$ називається **повною**, або **скрізь визначеною**, якщо її область визначення $D(f) \subset X$ співпадає з множиною X, тобто виконується рівність: $D(f) = X$, що на елементарному рівні рівносильно співвідношенню:*

$$(\forall x \in X)(\exists y \in Y)(f(x) = y);$$

*в противному випадку, коли $D(f) \neq X$, функція $f \subset X \times Y$ називається **частковою**, або **неповною** чи **не скрізь визначеною**, що рівносильно співвідношенню $(\exists x \in X) f\langle x\rangle = \varnothing$.*

5. Введемо поняття числової функції.

Означення 5.7.6. *Якщо для функції $f \subset X \times Y$ множини X, Y є числовими, то і сама функція f називається **числовою**.*

Приклад. Функції $f =$„$y = \sqrt{x}$“, $g =$„$y = \sqrt{|x|}$“, де $x, y \in \mathbb{R}$, є числовими. Очевидно, що $D(f) = E(f) = [0; +\infty)$; $D(g) = \mathbb{R}$, $E(g) = [0; +\infty)$. Легко бачити, що $f(x) = g(x)$ для всіх $x \in D(f)$. Тому функція $g =$„$y = \sqrt{|x|}$“ є продовженням функції $f =$„$y = \sqrt{x}$“, а функція f є звуженням функції g.

6. Для функцій, функціональних залежностей часто вживається термінологія, запозичена з геометрії — **це мова відображень, перетворень множин.**

Означення 5.7.7. *Функція $f \subset X \times Y$, визначена на всій множині X, тобто f — повна функція, називається* ***повним відображенням множини X в множину Y****, або, говорять, перетворенням множини X в множину Y по правилу, що встановлюється функцією f, і символічно позначається так: $f : X \longrightarrow Y$; при цьому значення $y = f(x)$ цієї функції f називаються образом елемента $x \in X$, а сам цей елемент x — прообразом для значення y; якщо ж функція f часткова, то її називають* ***частковим відображенням множини X в множину Y.***

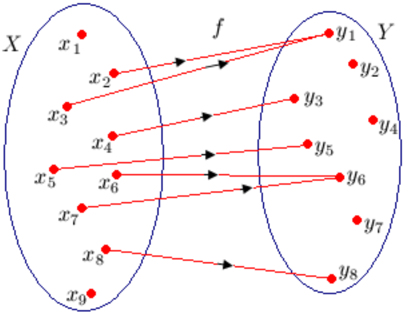
Означення 5.7.8. *Якщо область значень $E(f)$ повної функції $f \subset X \times Y$ співпадає з усією множиною Y, тобто виконуються рівності $D(f) = X$, $E(f) = Y$, то таку функцію f називають* ***повним відображенням множини X на множину Y*** *або коротко називають* ***сюр'єкцією X на Y*** *і позначають $f : X \xrightarrow{на} Y$.*

Очевидно, що довільну функцію $f \subset X \times Y$ можна вважати повним відображенням її області визначення на її область значень $E(f)$, тобто ця функція f є сюр'єкцією $D(f)$ на $E(f)$.

Означення 5.7.9. *Часткову функцію виду $f \subset X \times X$ часто називають* ***частковим перетворенням множини X****; а якщо така функція повна, тобто $D(f) = X$, то її називають* ***повним перетворенням множини X****, або перетворенням множини X.*

Про розглянуті вище числові функції $f =$ „$y = \sqrt{x}$“, $g =$ „$y = \sqrt{|x|}$“, де $x, y \in \mathbb{R}$, можна відмітити, що функція f є частковим перетворенням множини $\mathbb{R}$ або є сюр'єкцією множини $X = [0; +\infty)$ на саму себе, а функція g є повним перетворенням множини $\mathbb{R}$ або сюр'єкцією множини $\mathbb{R}$ на множину $X = [0; +\infty)$.

Наглядно функціональний зв'язок між двома множинами можна зобразити у вигляді стрілок, які з'єднують деякі точки однієї множини X з деякими точками другої множини Y так, **щоб не трапилось такого випадку, коли із однієї з точок множини X виходить більше однієї стрілки** (див. малюнок 1.45). На цьому малюнку маємо: $X = \{x_1, x_2, ..., x_9\}$; $Y = \{y_1, y_2, ..., y_8\}$; $D(f) = \{x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8\}$; $E(f) = \{y_1, y_3, y_5, y_6, y_8\}$.



Мал. 1.45.

7. Зауваження. Іноді про довільне бінарне відношення $\varphi \subset X \times Y$ говорять, що φ — **це багатозначна функція,** оскільки для деяких елементів $x \in X$ зрізи $\varphi\langle x\rangle$ можуть містити більше одного елемента з множини Y.

Разом з тим, із такого бінарного відношення можна легко утворити відповідну функцію $\hat{f} \subset X \times \mathfrak{P}(Y)$ таку, що має область визначення $D(\hat{f}) \overset{df}{=} pr_1\varphi$ і для довільного $x \in pr_1\varphi$ маємо $\hat{f}(x) \overset{df}{=} \varphi\langle x\rangle$.

8. Відмітимо, що по аналогії можна ввести поняття функції двох, трьох, ... , n-змінних. **Наприклад,** функцію двох змінних можна задати так, як в наступному означенні.

Означення 5.7.10. *Бінарне відношення* $f \subset (X_1 \times X_2) \times Y$ *називається функцією двох змінних, якщо виконується співвідношення* $(\forall(x_1;x_2) \in X_1 \times X_2;\ \ y_1, y_2 \in Y)(((x_1;x_2), y_1) \in f \wedge ((x_1;x_2);y_2) \in f \to y_1 = y_2)$.

При цьому $D(f) \overset{df}{=} \rho r_1 f = \{(x_1;x_2) \in X_1 \times X_2 | (\exists y \in Y)((x_1;x_2);y_1) \in f\} \subset X_1 \times X_2$ — **це область визначення цієї функції** f **двох змінних** x_1, x_2.

Якщо $D(f) = X_1 \times X_2$, то функція f двох змінних є повною. У тому випадку, коли $X_1 = X_2 = Y = X$, ця повна функція f, говорять, задає бінарну операцію на множині X. Якщо ж ця функція f часткова, неповна, то f задає часткову, не скрізь визначену бінарну операцію на X.

Наприклад, $+ \subset (\mathbb{N}\times\mathbb{N})\times\mathbb{N}$ — це бінарна операція додавання, а $- \subset (\mathbb{N}\times\mathbb{N})\times\mathbb{N}$ — бінарна часткова операція віднімання на множині $\mathbb{N}$ натуральних чисел. Тоді очевидно, що:

$+((3;2)) = 3 + 2 = 5;$

$+((12;7)) = 19;$

$-((5;1)) = 5 - 1 = 4;$

$-((2;3))$ — результат віднімання невизначений (результат $2-3 \notin \notin \mathbb{N}$).

З розглядом операцій на множинах, дослідженням їх властивостей та їх застосуваннями, детальніше можна познайомитися пізніше — при вивченні алгебраїчних операцій.

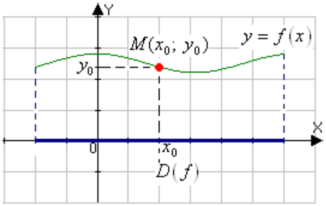
9. Способи задання та зображення функцій аналогічні тим, що були розглянуті раніше для бінарних відношень загального виду. Серед цих способів відмітимо такі, як:

- **аналітичний спосіб** — у вигляді певних формул, у яких встановлюється зв'язок між залежною та незалежною змінними; наприклад, $y = \sin 2x - 3; D(y) = [-2\pi; 2\pi]$;

- **табличний спосіб** — у вигляді таблиці, в якій наводяться значення незалежної змінної та відповідні їм значення залежної змінної; такий спосіб часто використовується в прикладних галузях знань;

- **графічний спосіб** — у вигляді графіка $\Gamma(f)$ функції $y = = f(x)$, який складається з множини точок $M(x; f(x))$, тобто $\Gamma(f) \overset{df}{=} \{M(x;y) | x \in D(f) \wedge y = f(x)\}$; цей спосіб часто використовується для числових функцій. Характерна особливість графіка при побудові його в координатній площині Oxy (див. малюнок 1.46) полягає в тому, що довільна пряма $x = x_0$, паралельна осі Oy, має не більше однієї спільної точки з цим графіком $\Gamma(f)$ (перетином їх може бути лише точка $M(x_0, f(x_0))$, якщо $x_0 \in D(f)$).

Кожен із відмічених вище способів задання та зображення функції має як свої переваги, так і недоліки. Так, **табличний спосіб** зручний тим, що з наведеної таблиці значень функції та її



Мал. 1.46.

аргументу легко, без додаткових обчислень, розглядати та аналізувати ці значення. Недоліками цього способу є недостатня наглядність в дослідженні залежностей змінних та, можливо, недостатня кількість отриманих табличних даних. **Графічний спосіб** задання функцій має високу степінь наглядності отриманих результатів, показує наглядно якісну зміну значень функції в залежності від зміни значень незалежної змінної, в ролі якої на практиці часто виступає час (згадайте хоча б графік у вигляді кардіограми серця, що показує роботу серцевих м’язів, тощо, при відповідному огляді у лікаря). До речі, на сьогоднішній день широко використовуються в повсякденній практиці різноманітні прилади, які в автоматичному режимі записують та зображують у вигляді графіків зміни залежної від часу (який грає роль незалежної змінної) тієї чи іншої досліджуваної величини як функції часу. Недоліком же графічного способу є невисока точність отримуваних значень досліджуваних функцій. **Аналітичний спосіб** задання функцій, який найчастіше використовується в математиці, в наукових дослідженнях, має такі переваги, як компактність запису виразу функції, можливість знаходження та обчислення значення функції для довільного значення її аргументу з області її визначення, можливість дослідження поведінки цієї функції з використанням необхідного математичного апарату. А безперечним недоліком аналітичного способу є недостатня наглядність у з’ясуванні поведінки зміни функції (особливо у випадку громіздких аналітичних залежностей).

Відмітимо, що на практиці всі три відмічені вище способи задання фукнкції іноді застосовуються комбіновано, що дає можливість краще і швидше дослідити необхідну функцію, вияснити поведінку її зміни та, у випадку необхідності, застосувати її на практиці. Серед інших способів задання функції перелічимо такі, як:

- **словесний** (описовий);
- **алгоритмічний** (з вказівкою чіткого плану виконання дій для отримання необхідних значень функції);
- **програмний** (алгоритмічний спосіб, записаний на одній із мов спілкування з ЕОМ);
- **за допомогою графів;**
- **за допомогою матриць** (подробиці зображення таких логічних матриць див. вище — при розгляді способів зображення бінарних відношень загального виду).

10. Нехай $f \subset X \times Y$ — деяка функція, тобто однозначне відношення між елементами множин X і Y або, як було відмічено раніше, f — це є часткове відображення $f : X \longrightarrow Y$ множини X в множину Y. Легко бачити, що обернене відношення $f^{-1} \subset$ $\subset Y \times X$ не завжди є функцією, тобто не завжди є однозначним відношенням між елементами множини Y і X. Дійсно, наприклад, для числової функції $f =$„$y = x^2$“, де $x, y \in \mathbb{R}$ — дійсні числа, отримаємо обернене відношення $f^{-1} = \{(y; x)|y = x^2\} = \{(y; x)|x =$ $= -\sqrt{y} \vee x = \sqrt{y}\}$, яке не є однозначним, не є функцією, оскільки, наприклад, для одного значення $y_0 = 4$ отримаємо два відповідних значення, $x_{01} = -2$, $x_{02} = 2$, тобто обидві пари $(4; -2)$ і $(4; 2)$ належать відношенню f^{-1}. Взявши, наприклад, числову функцію $f =$„$y = 2^x$“, де $x, y \in \mathbb{R}$, отримаємо обернене відношення: $f^{-1} =$ $= \{(y; x)|y = 2^x\} = \{(y; x)|x = log_2 y\} =$„$x = log_2 y$“, яке, як ми знаємо з шкільної математики, є однозначним відношенням, тобто функцією.

Означення 5.7.11. *Бінарне відношення $f \subset X \times Y$ між елементами множин X і Y називається* ***обернено однозначним****, якщо обернене до нього відношення $f^{-1} \subset Y \times X$ є однозначним,* *тобто f^{-1} є функцією, що на елементарному рівні рівносильно співвідношенню*

$$(\forall x_1, x_2 \in X; y \in Y)((x_1; y) \in f \wedge (x_2; y) \in f \Rightarrow x_1 = x_2). (5.7.3)$$

Наприклад, відношення $f = \{(x; y) | x = |y|\} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, легко бачити, є обернено однозначним на множині $\mathbb{R}$ дійсних чисел.

Означення 5.7.12. *Бінарне відношення $f \subset X \times Y$ між елементами множин X і Y називається взаємно однозначним або, говорять,* ***ін'єкцією*** *чи* ***ін'єктивним бінарним відношенням****, якщо воно є одночасно однозначним і обернено однозначним, що на елементарному рівні рівносильно співвідношенням (5.7.1) і (5.7.3).*

Можна показати, що виконання співвідношень (5.7.1), (5.7.3) рівносильно виконанню такого одного співвідношення:

$$\begin{aligned}&(\forall x_1, x_2 \in X)(x_1, x_2 \in D(f) \rightarrow \\ &\rightarrow (x_1 \neq x_2 \leftrightarrow f(x_1) \neq f(x_2))),\end{aligned} \tag{5.7.4}$$

яке можна подати у вигляді:

$$\begin{aligned}&(\forall x_1, x_2 \in X)(x_1, x_2 \in D(f) \rightarrow \\ &\rightarrow (x_1 = x_2 \leftrightarrow f(x_1) = f(x_2))).\end{aligned} \tag{5.7.5}$$

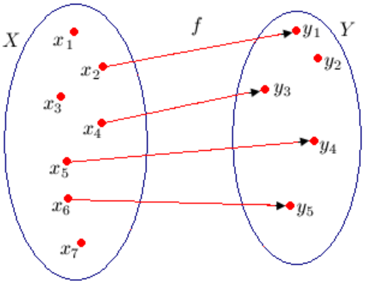
У більш загальному (але рівносильному) вигляді (5.7.4), (5.7.5) матимуть відповідно вигляд:

$$(\forall x_1, x_2 \in X; y_1, y_2 \in Y)((x_1; y_1), (x_2; y_2) \in f \rightarrow (x_1 \neq x_2 \leftrightarrow y_1 \neq y_2));$$

$$(\forall x_1, x_2 \in X; y_1, y_2 \in Y)((x_1; y_1), (x_2; y_2) \in f \rightarrow (x_1 = x_2 \leftrightarrow y_1 = y_2));$$

Зауваження. За прийнятою нами термінологією назви „взаємно однозначне бінарне відношення“, „ін'єкція“, „ін'єктивне бінарне відношення“ є синонімами назв „взаємно однозначна функція“, „ін'єктивна функція“, „взаємно однозначне відображення“.

Наглядне зображення ін'єктивної функції у вигляді стрілок, що з'єднують деякі з точок множини X з деякими точками множини Y подамо схематично на малюнку 1.47. На цьому



Мал. 1.47.

малюнку маємо: $X = \{x_1, x_2, ..., x_7\}$; $Y = \{y_1, y_2, ..., y_5\}$; $f = \{(x_2; y_1), (x_4; y_3), (x_5; y_4), (x_6; y_5)\}$.

Зауважимо, що крім наведених вище синонімічних назв взаємно однозначних функцій вживають і назви з словом **„оборотний“**. Так, у цих випадках говорять про **оборотну функцію, оборотне однозначне бінарне відношення, оборотне відображення.** Тоді, якщо $f \subset X \times Y$ — оборотна функція, $f^{-1} \subset Y \times X$ — функція, яку називають оберненою до функції $f \subset X \times Y$. А оскільки, як ми знаємо, виконується рівність $(f^{-1})^{-1} = f$, то така пара функцій $f \subset X \times Y$ і $f^{-1} \subset Y \times X$ називається парою **взаємно обернених** або парою **взаємно оборотних** функцій. Аналогічні міркування відносяться і до оборотних, обернених та взаємно оборотних, взаємно обернених відображень.

11. Введемо означення бієкції між множинами

Означення 5.7.13. *Якщо бінарне відношення $f \subset X \times Y$ є повною оборотною функцією такою, що $E(f) = Y$, тобто є повним оборотним відображенням множини X на Y, то f називається **бієкцією** (або **взаємно однозначною відповідністю**) між множинами X та Y.*

Очевидно, що довільна взаємно однозначна функція $f \subset X \times Y$

є бієкцією між підмножинами $D(f) \subset X$ і $E(f) \subset Y$.

Означення 5.7.14. *Якщо бінарне відношення* $f \subset X \times X$, *де* $X \neq \varnothing$, *є ін'єктивною сюр'єкцією, то воно називається* ***підстановкою множини*** X.

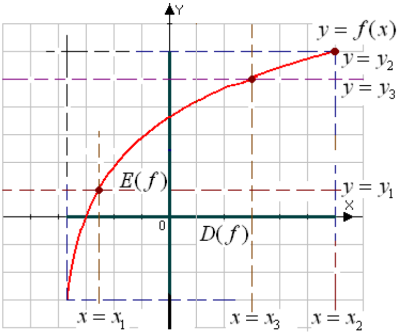
12. Приклади.

1. Відношення „x сидить на стільці y“ є оборотною функцією між множиною присутніх осіб в даній аудиторії та множиною стільців в цій аудиторії; воно є одночасно і бієкцією між множиною сидячих студентів та множиною зайнятих стільців.

2. Відношення $f =$„$y = 2^x \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$“ є оборотною функцією і одночасно є бієкцією між множиною $\mathbb{R}$ всіх дійсних чисел і множиною $Y = \{y \in \mathbb{R} | y > 0\}$ всіх додатних дійсних чисел.

3. Відношення $f =$„$y = x^3 \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$“ є підстановкою множини $\mathbb{R}$ всіх дійсних чисел.

Зауважимо, що графік довільної числової оборотної функції f **має таку особливість:** довільна пряма, паралельна осі Ox, і довільна пряма, паралельна осі Oy, може мати з цим графіком не більше однієї спільної точки (див. малюнок 1.48).



Мал. 1.48.

13. Відмітимо, що при розгляді пари взаємно обернених між собою числових функцій із стандартними позначеннями $y = f(x)$

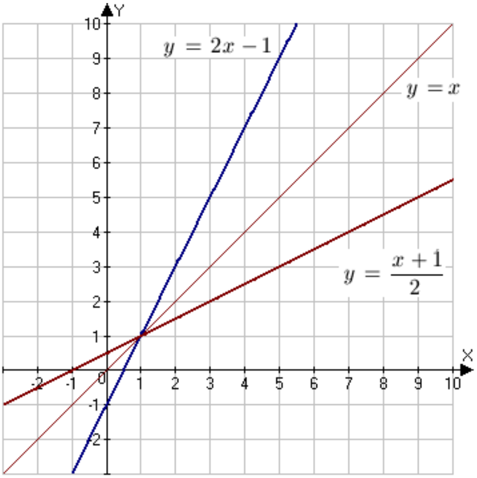
і $x = f^{-1}(y)$ та побудові відповідних їм графіків на координатній площині ми формально отримаємо відповідні їм графіки Γ_f і $\Gamma_{f^{-1}}$ такі, що ці графіки між собою співпадуть, тобто матимемо рівність $\Gamma_f = \Gamma_{f^{-1}}$ двох однакових множин точок, що утворюють ці графіки. В цьому переконує нас і такий простий приклад. Очевидно, що функція $f =„y = 2x - 1“$ оборотна, а оберненою до неї є функція $f^{-1} =„x = \dfrac{y+1}{2}“$ (або можна було б взяти для ілюстрації і пару взаємно обернених функцій $y = 2^x$ — показникову і $x = \log_2 y$ — логарифмічну). Легко бачити, що, наприклад, точка $M(2;3)$ належить як графіку Γ_f, так і графіку $\Gamma_{f^{-1}}$. В подібному можна було б переконатися і для інших точок. Разом з тим, в силу означення оберненості довільного бінарного відношення φ (якщо воно не симетричне, тобто $\varphi^{-1} \neq \varphi$), ми знаємо, що обов'язково є такі пари $(x_0; y_0)$, де $x_0 \neq y_0$, що якщо $(x_0; y_0) \in \varphi$, то $(x_0; y_0) \notin \varphi^{-1}$, і навпаки. Взята ж нами функція $f =„y = 2x-1“$ не є симетричним бінарним відношенням, що видно хоча б з того, що $(2;3) \in f$ і $(3;2) \notin f$. А звідси випливає, що графіки для f і f^{-1} не повинні співпадати, що суперечить сказаному вище про те, що $\Gamma_f = \Gamma_{f^{-1}}$. Щоб уникнути такої суперечності (адже, як ми знаємо з попереднього, ці графіки повинні не співпадати, а бути симетричними між собою відносно діагоналі Δ_R, яка є нічим іншим, як прямою з рівнянням $y = x$), запис оберненої функції до оборотної перепозначаємо: вважаємо, що до оборотної функції $y = f(x)$ оберненою є функція $y = f^{-1}(x)$(а не $x = f^{-1}(y)$). І ось тоді їх графіки Γ_f і $\Gamma_{f^{-1}}$ справді будуть симетричними між собою відносно прямої $y = x$. Завершимо розгляд нашого приклада побудовою графіків функції $f =„y = 2x - 1“$ і оберненої до неї функції $f^{-1} =„y = \dfrac{x+1}{2}“$, записаної з вказаними перепозначеннями (малюнок 1.49). Бачимо, що графіки справді симетричні відносно діагоналі $\Delta_R =„y = x“$.

До речі відмітимо, що для взаємно обернених між собою функцій f і f^{-1} їх області визначення та області значень зв'язані між собою такими рівностями:

$$D(f^{-1}) = E(f); \tag{5.7.6}$$

$$E(f^{-1}) = D(f). \tag{5.7.7}$$

14. Використовуючи вказані вище означення тих чи інших фун-



Мал. 1.49.

кціональних залежностей, **можна довести справедливість наступних тверджень**:

1) для того, щоб бінарне відношення $f \subset X \times Y$ *було функцією, необхідно і достатньо, щоб виконувалася рівність:* $f \circ f^{-1} = \Delta_{E(f)} \subset \Delta_Y$;

2) для того, щоб бінарне відношення $f \subset X \times Y$ *було обернено однозначним, тобто відношення* $f^{-1} \subset Y \times X$ *було функцією, необхідно і достатньо, щоб виконувалася рівність:* $f^{-1} \circ f = \Delta_{D(f)} \subset \Delta_X$;

3) для того, щоб бінарне відношення $f \subset X \times Y$ *було ін'єкцією, необхідно і достатньо, щоб виконувалися рівності:* $f \circ f^{-1} = \Delta_E(f) \subset \Delta_Y$, $f^{-1} \circ f = \Delta_{D(f)} \subset \Delta_X$;

4) для того, щоб бінарне відношення $f \subset X \times Y$ *було бієкцією між множинами* X *і* Y, *необхідно і достатньо, щоб виконувалися рівності:* $f \circ f^{-1} = \Delta_{E(f)} = \Delta_Y$, $f^{-1} \circ f = \Delta_{D(f)} = \Delta_X$;

5) для того, щоб бінарне відношення $f \subset X \times Y$ *було функцією, необхідно і достатньо, щоб для довільних підмножин* $Y_1, Y_2 \subset Y$ *виконувалася рівність* $\breve{f}^{-1}(Y_1 \cap Y_2) = \breve{f}^{-1}(Y_1) \cap \breve{f}^{-1}(Y_2)$;

6) для того, щоб бінарне відношення $f \subset X \times Y$ *було обернено* *однозначним, необхідно і достатньо, щоб для довільних підмножин* $X_1, X_2 \subset X$ *виконувалася рівність* $\breve{f}(X_1 \cap X_2) = \breve{f}(X_1) \cap \breve{f}(X_2)$;

7) для того, щоб бінарне відношення $f \subset X \times X$ *було підстановкою множини* X, *необхідно і достатньо, щоб виконувалися рівності:* $f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = \Delta_X$;

8) для того, щоб функція $g \subset X \times Y$ *була продовженням функції* $f \subset X \times Y$, *тобто виконувалось включення* $f \subset g$, *необхідно і достатньо, щоб виконувалася рівність:* $g \circ \Delta_{D(f)} = f$;

9) для того, щоб об'єднання двох функцій $f_1, f_2 \subset X \times Y$ *було функцією (такі функції називаються* ***сумісними****), необхідно і достатньо, щоб виконувалася рівність:* $f_2 \circ \Delta_{D(f_1)} = f_1 \circ \Delta_{D(f_2)}$;

10) повне перетворення $f \subset X \times X$ *множини* X *називається* ***інволюцією*** *цієї множини, якщо* $f \circ f = \Delta_X$. Довести, що f є інволюцією множини тоді і тільки тоді, коли f — симетричне бінарне відношення, тобто $f \subset f^{-1}$ (від латинського **involution** — завиток, тобто при повторності перетворення елемент перетворюється сам в себе);

11) якщо відношення $f : X \longrightarrow Y$, $g : Y \longrightarrow S$ *— часткові відображення, то їх композиція* $g \circ f \subset X \times S$ *є частковим відображенням* $g \circ f : X \longrightarrow S$ *таким, що задовольняє співвідношення*

$$g \circ f \neq \varnothing \Rightarrow (\forall x \in X)(x \in D(g \circ f) \rightarrow (g \circ f)(x) = g(f(x)));$$

така композиція $g \circ f$ *часто називається складеною (або складною) функцією, причому в ній функція* $f \subset X \times Y$ *називається внутрішньою, а функція* $g \subset Y \times S$ *— зовнішньою; наприклад, для числових функцій* $f = $„$y = \log_3(x-5) + x$“, $g = $„$y = \sin\left(\dfrac{x+4}{3}\right)$“, *де* $x, y \in \mathbb{R}$ *— дійсні змінні, отримаємо складну числову функцію* $g \circ f = $„$y = sin\left(\dfrac{1}{3}((log_3(x-5) + x) + 4)\right)$“;

12) якщо відношення $f \subset X \times Y$, $g \subset Y \times S$ *обернено однозначні, то і відношення* $g \circ f \subset X \times S$ *обернено однозначне*;

13) якщо $f \subset X \times Y$, $g \subset Y \times S$ *взаємно однозначні, тобто ін'єктивні, функції, то їх композиція (складна функція)* $g \circ f \subset$ $\subset X \times S$ *є ін'єктивною (тобто взаємно однозначною) функцією*;

14) якщо відношення $f, g \subset X \times Y$ *однозначні, або обернено однозначні, або ін'єктивні, то і їх перетин* $f \cap g \subset X \times Y$ *є відповідно* *однозначним, або обернено однозначним, або ін'єктивним відношенням.*

15. для того, щоб функція $f \subset X \times Y$ була ін'єктивною, необхідно і достатньо, щоб для довільних підмножин виконувалася рівність $\breve{f}(X_1 \cap X_2) = \breve{f}(X_1) \cap \breve{f}(X_2)$.

Доведення більшості з наведених тверджень випливають одні з одних або ж з відповідних означень. Для зразка у вигляді ланцюжків рівносильних перетворень покажемо справедливість тверджень 1 і 15.

Твердження 1. *Для того, щоб бінарне відношення $f \subset X \times Y$ було функцією, необхідно і достатньо, щоб виконувалася рівність $f \circ f^{-1} = \Delta_{E(f)} \subset \Delta_Y$.*

Доведення. Маємо: $f \circ f^{-1} \subset \Delta_Y \equiv (\forall y_1, y_2 \in Y)((y_1; y_2) \in f \circ$ $\circ f^{-1} \to y_1 = y_2) \equiv (\forall y_1, y_2 \in Y)((\exists x \in X)((y_1; x) \in f^{-1} \wedge (x; y_2) \in$ $\in f) \to y_1 = y_2) \equiv (\forall y_1, y_2 \in Y; x \in X)(((x; y_1) \in f \wedge (x; y_2) \in f) \to$ $\to y_1 = y_2) \equiv (f \subset X \times Y)$ — функція за означенням; в даному ланцюжку рівносильностей бачимо, що змінні $y_1, y_2 \in Y$ належать області значень $E(f)$ функції $f \subset X \times Y$; тому робимо висновок про те, що виконується рівність $f \circ f^{-1} = \Delta_{E(f)}$, яку і треба було довести ■

Розглянемо тепер твердження 15.

Твердження 15. *Для того, щоб функція $f \subset X \times Y$ була ін'єктивною, необхідно і достатньо, щоб для довільних підмножин виконувалася рівність $\breve{f}(X_1 \cap X_2) = \breve{f}(X_1) \cap \breve{f}(X_2)$.*

Доведення. Оскільки, як ми знаємо з попереднього, включення $\breve{f}(X_1 \cap X_2) \subset \breve{f}(X_1) \cap \breve{f}(X_2)$ має місце для довільних бінарних відношень, то досить розглянути обернене включення. **Отримаємо**: $\breve{f}(X_1) \cap \breve{f}(X_2) \subset \breve{f}(X_1 \cap X_2) \equiv (\forall y \in Y)(y \in \breve{f}(X_1) \cap \breve{f}(X_2) \to y \in$ $\in \breve{f}(X_1 \cap X_2)) \equiv (\forall y \in Y)(((\exists x_1 \in X_1)(x_1; y) \in f \wedge (\exists x_2 \in X_2)(x_2; y) \in$ $\in f) \to (\exists x \in X)(x \in X_1 \wedge x \in X_2 \wedge (x; y) \in f)) \equiv (\forall y \in Y; x_1, x_2 \in$ $\in X)(((x_1; y) \in f \wedge (x_2; y) \in f) \to x_1 = x_2) \equiv$ функція $f \subset X \times Y$ є ін'єктивною за означенням. Щоб остаточно переконатися в справедливості твердження 15, досить показати, що в наведеному ланцюжку передостанні два співвідношення рівносильні для довільних підмножин $X_1, X_2 \subset X$.

Нехай виконується співвідношення:

$$(\forall y \in Y;\ x_1, x_2 \in X;\ X_1, X_2 \subset X)(x_1 \in X_1 \wedge$$

$$\begin{aligned} &\wedge x_2 \in X_2 \wedge (x_1; y) \in f \wedge (x_2; y) \in f \to \\ &\to (\exists x \in X)(x \in X_1 \wedge x \in X_2 \wedge (x; y) \in f)), \qquad (*) \end{aligned}$$

і нехай $((x_1; y) \in f \wedge (x_2; y) \in f)$. Взявши $X_1 = \{x_1\}$, $X_2 = \{x_2\}$, з співвідношення (*) отримаємо: $x_1 = x_2$, що показує виконання співвідношення

$$(\forall y \in Y; x_1, x_2 \in X)(((x_1, y) \in f \wedge (x_2, y) \in f) \to x_1 = x_2). \qquad (**)$$

Навпаки, нехай виконується співвідношення (**) і умова $(x_1 \in X_1 \wedge \wedge x_2 \in X_2 \wedge (x_1; y) \in f \wedge (x_2; y) \in f)$ співвідношення (*). Тоді з (**) очевидним чином маємо: $x_1 = x_2$, що вказує на виконання висновку $(\exists x)(x \in X_1 \wedge x \in X_2 \wedge (x, y) \in f)$ співвідношення (*), оскільки досить покласти $x = x_1 = x_2$. Отже, із співвідношення (**) випливає співвідношення (*), чим і завершується доведення твердження 15 ■

15. При розгляді відношень порядків та деяких їх узагальнень було відмічено, що між ними та відношеннями еквівалентності, незважаючи на їх істотні відмінності, існує певний взаємозв'язок. Виявляється, що **між функціональними відношеннями та еквівалентностями** і деякими їх узагальненнями (знову незважаючи на їх, здавалось би, істотні відмінності) теж **існує певний взаємозв'язок,** на з'ясуванні якого далі зупинимося, не вдаючись в подробиці досліджень. Можна було би піти і далі, вказавши на взаємозв'язки функціональних відношень з деякими порядками. Наведені думки навіюють на вислів, який російською мовою звучить так: „**Действительно, наш мир тесен!**", — це з одного боку, а з другого боку — це показує, наскільки все в природі, в дослідженнях, в науці і на практиці переплетено та взаємопов'язано між собою.

Нехай $f \subset X \times Y$ — деяка функція.

Означення 5.7.15. *Відношення* $\varepsilon_f \subset X \times X$ *називається* ***ядром функції*** $f \subset X \times Y$, *якщо воно визначається рівністю*

$$\varepsilon_f \overset{df}{=} \{(x_1; x_2) | f\langle x_1\rangle = f\langle x_2\rangle \neq \varnothing\} \subset X \times X. \qquad (5.7.8)$$

Легко бачити, що це ядро ε_f функції $f \subset X \times X$ є частковою еквівалентністю на множині X, а точніше – є еквівалентністю на підмножині $D(f) \subset X$, тобто на області визначення даної функції $f \subset X \times Y$.

Очевидно, що ядро ε_f для повної функції $f \subset X \times Y$, тобто повного відображення $f : X \longrightarrow Y$, є еквівалентністю на множині X, оскільки у цьому випадку $D(f) = X$. Іноді ядро ε_f називають відношенням **рівнообразності** функції f.

Можна показати, що ядро ε_f функції f можна виразити рівністю

$$\varepsilon_f = f^{-1} \circ f. \qquad (5.7.9)$$

У випадку повної функції $f \subset X \times Y$ її ядро можна було би виразити замість рівності (10) такою простішою рівністю:

$$\varepsilon_f = \{(x_1; x_2) | f(x_1) = f(x_2)\}. \qquad (5.7.10)$$

Маючи ядро ε_f функції $f \subset X \times Y$ на підмножині $D(f) \subset X$, можна утворити, як ми знаємо, фактор-множину $D(f)/\varepsilon_f$. А якщо ж функція $f \subset X \times Y$ повна, то отримаємо фактор-множину X/ε_f всієї множини X.

Легко бачити, що у випадку ін'єктивної функції $f \subset X \times Y$ відповідне ядро ε_f є частково-тотожним відношенням $\Delta_{D(f)}$ на множині X, тобто виконується рівність $\varepsilon_f = \Delta_{D(f)}$. А якщо ж ін'єктивна функція $f \subset X \times Y$ повна, то ядро ε_f є тотожним відношенням множини X, тобто виконується рівність $\varepsilon_f = \Delta_X$.

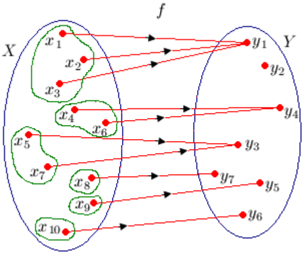
Наглядне зображення утворення ядра ε_f та фактор-множини X/ε_f всієї множини, які відповідають повній функції $f \subset X \times Y$ можна схематично показати на малюнку 1.50. На цьому малюнку маємо: $X = \{x_1, x_2, ..., x_{10}\}$; $Y = \{y_1, y_2, ..., y_6\}$;

$\varepsilon_f = \{(x_1; x_1), (x_2; x_2), (x_3; x_3), (x_1; x_2), (x_1; x_3), (x_2; x_1), (x_3; x_1), (x_2; x_3), (x_3; x_2), (x_8; x_8), (x_9; x_9), (x_{10}; x_{10}), (x_4; x_6), (x_6; x_4), (x_4; x_4), (x_6; x_6), (x_5; x_5), (x_7; x_7), (x_5; x_7), (x_7; x_5)\}$;

$X/\varepsilon_f = \{\{x_1, x_2, x_3\}; \{x_4, x_6\}; \{x_5, x_7\}; \{x_8\}; \{x_9\}; \{x_{10}\}\}$.

Приклади.

1. $f =$„$y = \sin x$“, де $x \in \mathbb{R}$ — числова повна функція;
$\varepsilon_f = \{(x_1; x_2) | \sin x_1 = \sin x_2\} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ — ядро f;
$R/\varepsilon_f = \{\{(-1)^n \arcsin y + n\pi | n \in \mathbb{Z}\} | y \in [-1; 1]\}$ — фактор-множина по ядру ε_f.



Мал. 1.50.

2. $f =$„$y = E(x)$ — ціла частина числа x, яка не перевищує $x \in \mathbb{R}$“— повна числова функція така, що $E(x) = n \in \mathbb{Z}$, де $n \leqslant x < n + 1$; $\varepsilon_f = \{(x_1; x_2)|E(x_1) = E(x_2)\} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ — ядро f; $R/\varepsilon_f = \{[n; n + 1)|n \in \mathbb{Z}\}$ — множина всіх напіввідрізків виду $[n; n + 1)$, де $n \in \mathbb{Z}$ — довільне ціле число; тут, наприклад, $E(3) = E(3.2) = E(3.5) = E(3.9) = 3$.

16. Бачимо, що з кожною функцією $f \subset X \times Y$ виникає часткова еквівалентність — ядро $\varepsilon_f \subset X \times X$ цієї функції, яке утворює розбиття області визначення $D(f)$ цієї функції — фактор-множину $D(f)/\varepsilon_f$ — на класи по ε_f. А якщо функція f повна, то відповідне ядро ε_f є еквівалентністю на X, що утворює фактор-множину X/ε_f.

Виявляється, легко бачити, що і, навпаки, довільна часткова еквівалентність $\varepsilon \subset X \times X$, утворюючи фактор-множину X_1/ε на підмножині $X_1 = pr_1\varepsilon$, задає сюр'єкцію $f_\varepsilon : X_1 \xrightarrow{\text{на}} X_1/\varepsilon$, ядром $\varepsilon_{f_\varepsilon}$ якої є задана часткова еквівалентність $\varepsilon \subset X \times X$. Аналогічно і довільна еквівалентність $\varepsilon \subset X \times X$ задає сюр'єкцію $f_\varepsilon : X \xrightarrow{\text{на}} X/\varepsilon$ всієї множини X на фактор множину X/ε, а ядром цієї сюр'єкції f_ε є задана еквівалентність, тобто виконується рівність $\varepsilon_{f_\varepsilon} = \varepsilon$. Ця **сюр'єкція** часто **називається канонічною** або **природною** і задається рівністю $f_\varepsilon(x) \overset{df}{=} \varepsilon\langle x\rangle$, де $x \in D(f) \subset X$, а $\varepsilon\langle x\rangle$ — клас еквівалентності по ε, який містить елемент x.

Приклад. Нехай $\varepsilon = \{(1;1),(1;2),(2;1),(2;2),(3;3),(4;4)\} \subset \subset X \times X$ — еквівалентність на множині $X = \{1,2,3,4\}$. Очевидно, що фактор-множина X/ε має такий вигляд: $X/\varepsilon = \{\{1,2\};\{3\};\{4\}\}$. Тоді канонічна сюр'єкція $f_\varepsilon : X \xrightarrow{\text{на}} X/\varepsilon$ буде такою: $f_\varepsilon(1) = f_\varepsilon(2) = = \{1,2\}$; $f_\varepsilon(3) = \{3\}$; $f_\varepsilon(4) = \{4\}$.

Зауваження. Введене нами вище ядро $\varepsilon_f \subset X \times X$ для функції можна досліджувати і для довільного бінарного відношення: $\rho \subset \subset X \times Y$: ε_ρ — **ядро** $\rho \overset{df}{\Longleftrightarrow} \varepsilon_\rho = \{(x_1;x_2)|\rho\langle x_1\rangle = \rho\langle x_2\rangle \neq \varnothing\}$.

17. Узагальненням функціональних відношень є так звані **квазіоднозначні** або **дифункціональні відношення** (префікс **ди** — означає „двічі“, „подвійний“).

Означення 5.7.16. *Відношення $\rho \subset X \times Y$ називається квазіоднозначним або дифункціональним, якщо довільні його різні зрізи по елементам множини X не перетинаються, тобто виконується співвідношення:*

$$(\forall x_1, x_2 \in X)(\rho\langle x_1\rangle \cap \rho\langle x_2\rangle \neq \varnothing \to \rho\langle x_1\rangle = \rho\langle x_2\rangle), \quad (5.7.11)$$

що рівносильно співвідношенню

$$(\forall x_1, x_2 \in X)(\rho\langle x_1\rangle \neq \rho\langle x_2\rangle \to \rho\langle x_1\rangle \cap \rho\langle x_2\rangle = \varnothing). \quad (5.7.12)$$

Можна показати, що мають місце наступні **твердження, які розкривають властивості дифункціональних відношень**:

1) для того, щоб бінарне відношення $\rho \subset X \times Y$ було квазіфункціональним, необхідно і достатньо, щоб виконувалася рівність

$$\rho \circ \rho^{-1} \circ \rho = \rho; \quad (5.7.13)$$

2) бінарне відношення $\rho \subset X \times Y$ квазіоднозначне тоді і тільки тоді, коли обернене до нього відношення $\rho^{-1} \subset Y \times X$ квазіоднозначне;

3) перетин квазіоднозначних відношень між елементами заданих множин є квазіоднозначним відношенням між елементами цих множин;

4) серед всіх квазіоднозначних відношень між елементами множин X та Y найменшим є порожнє відношення $\varnothing$, а найбільшим — декартів добуток $X \times Y$;

5) довільне однозначне або обернене однозначне відношення є квазіоднозначними відношеннями;

6) довільна часткова еквівалентність є квазіоднозначним відношенням;

7) для того, щоб квазіоднозначне відношення було (частковою) еквівалентністю, необхідно і достатньо, щоб воно було (частково) рефлексивним;

8) якщо відношення $\rho \subset X \times Y$ *квазіоднозначне, то відношення* $\rho \circ \rho^{-1} \subset Y \times Y$, $\rho^{-1} \circ \rho \subset X \times X$ *— часткові еквівалентності*;

9) якщо відношення $\rho \subset X \times Y$ *повне сюр'єктивне квазіоднозначне відношення, то відношення* $\rho \circ \rho^{-1} \subset Y \times Y$, $\rho^{-1} \circ \rho \subset X \times X$ *— еквівалентності*;

10) для того, щоб відношення $\rho \subset X \times Y$ *було квазіоднозначним, необхідно і достатньо, щоб виконувалася хоча би одна із рівностей:* $\rho \circ \rho^{-1} = \varepsilon_{\rho^{-1}}$, $\rho^{-1} \circ \rho = \varepsilon_{\rho}$, *де* ε_{ρ} *— ядро* ρ, *а* $\varepsilon_{\rho^{-1}}$ *— ядро* ρ^{-1};

11) якщо $\rho \subset X \times Y$ *— повне сюр'єктивне бінарне відношення, тобто* $pr_1\rho = X$, $pr_2\rho = Y$, *то для того, щоб відношення* $\rho \subset X \times Y$ *було квазіоднозначним, необхідно і достатньо, щоб знайшлися такі розбиття* $\{X_i | i \in I\}$ *множини* X *та* $\{Y_i | i \in I\}$ *множини* Y, *що* $\rho = \bigcup\limits_{i \in I}(X_i \times Y_i)$;

12) для того, щоб відношення $\rho \subset X \times Y$ *було квазіоднозначним, необхідно і достатньо, щоб знайшлися такі розбиття* $\{X_i | i \in I\}$ *області визначення* $pr_1\rho \subset X$ *і* $\{Y_i | i \in I\}$ *області значень* $pr_2\rho \subset Y$ *відношення* ρ, *що* $\rho = \bigcup\limits_{i \in I}(X_i \times Y_i)$.

Доведення наведених тверджень випливають з відповідних означень або ж одні з одних. **Для зразка доведемо, наприклад, твердження 1,** а інші пропонуємо довести самостійно.

Зрозуміло, що **доведення** цього твердження 1 зводиться до доведення рівносильності співвідношень (5.7.11) і (5.7.13). Для цього перш за все подамо ці співвідношення (5.7.11) і (5.7.13) в елементарному вигляді. Для співвідношення (5.7.11) маємо наступний ланцюжок рівносильних перетворень: (5.7.11)$\equiv$ $(\forall x_1, x_2 \in X)((\exists y_2 \in \in Y)((x_1; y_2), (x_2; y_2) \in \rho) \to (\forall y_1 \in Y)((x_1; y_1) \in \rho \leftrightarrow (x_2; y_1) \in \in \rho)) \equiv (\forall x_1, x_2 \in X; y_1, y_2 \in Y)((x_1; y_2), (x_2; y_2) \in \rho \to ((x_1, y_1) \in \in \rho \leftrightarrow (x_2; y_1) \in \rho))$. Отже, співвідношення (5.7.11) прийняло такий елементарний вигляд:

$$(\forall x_1, x_2 \in X; y_1, y_2 \in Y)((x_1; y_2), (x_2; y_2) \in \rho \to$$
$$\to ((x_1, y_1) \in \rho \Leftrightarrow (x_2; y_1) \in \rho)). \qquad (*)$$

В рівності (5.7.13) включення $\rho \subset \rho \circ \rho^{-1} \circ \rho$ очевидне. Дійсно, якщо $(x; y) \in \rho$, то очевидно $((x; y) \in \rho \wedge (y; x) \in \rho^{-1} \wedge (x; y) \in \rho)$, що дає $(x; y) \in \rho \circ \rho^{-1} \circ \rho$; а це вказує на те, що справді виконується включення $\rho \subset \rho \circ \rho^{-1} \circ \rho$. Тому рівність (5.7.13) можна замінити на включення $\rho \circ \rho^{-1} \circ \rho \subset \rho$. У результаті для (5.7.13) отримаємо такий ланцюжок рівносильних перетворень: (5.7.13)$\equiv \rho \circ \rho^{-1} \circ \rho \subset$ $\subset \rho \equiv (\forall x_1 \in X; y_1 \in Y)((x_1; y_1) \in \rho \circ \rho^{-1} \circ \rho \to (x_1; y_1) \in \rho) \equiv (\forall x_1 \in$ $\in X; y_1 \in Y)((\exists x_2 \in X; y_2 \in Y)((x_1; y_2), (x_2; y_2), (x_2; y_1) \in \rho) \to$ $\to (x_1; y_1) \in \rho) \equiv (\forall x_1, x_2 \in X; y_1, y_2 \in Y)((x_1; y_2), (x_2; y_2), (x_2; y_1) \in$ $\in \rho \to (x_1; y_1) \in \rho)$.

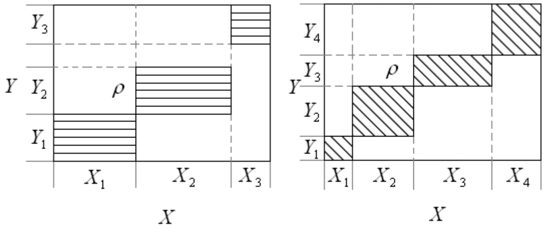
Отже, співвідношення (5.7.13) прийняло такий елементарний вигляд:

$$(\forall x_1, x_2 \in X; y_1, y_2 \in Y)((x_1; y_2), (x_2; y_2), (x_2; y_1) \in$$
$$\in ((x_1; y_2), (x_2; y_2), (x_2; y_1) \in \rho \to (x_1; y_1) \in \rho). \qquad (**)$$

Неважко побачити, що співвідношення (*), (**) між собою рівносильні (перевірте самостійно). А тому і співвідношення (5.7.11), (5.7.13) між собою рівносильні, чим і завершуємо доведення твердження 1 ■

Твердження 11, 12, відмітимо, по суті **розкривають будову квазіоднозначного відношення** $\rho \subset X \times Y$, яка нагадує будову часткової еквівалентності або еквівалентності (якщо $\rho \subset X \times Y$ повне і сюр'єктивне): $\rho = \bigcup\limits_{i \in I} (X_i \times Y_i)$ — це об'єднання „прямокутників“$X_i \times Y_i$ — декартових добутків, які між собою не перетинаються (згадаймо, що еквівалентність $\varepsilon \subset X \times X$ — це об'єднання $\varepsilon = \bigcup\limits_{i \in I} (X_i \times X_i)$ „квадратів“$X_i \times X_i$ — декартових квадратів, які між собою не перетинаються). У результаті зображення квазіоднозначних відношень $\rho \subset X \times Y$ на діаграмах матиме такий вигляд, як на малюнку 1.51.

Завершуючи огляд дифункціональних відношень, ще раз переконуємося в глибоких взаємозв'язках між еквівалентностями та



$\rho \subset X \times Y$ – **квазіоднозначне не сюр'єктивне відношення**

$\rho \subset X \times Y$ – **квазіоднозначне повне і сюр'єктивне відношення**

Мал. 1.51.

функціями різного виду. По суті, **квазіоднозначні відношення є тим джерелом, з якого виникають як еквівалентності, так і функції**. І в цьому нас переконують, якщо вдуматися, наведені вище малюнки (проаналізуйте їх самостійно).

18. Зауваження. В даній темі зовсім не розглядалися питання, пов'язані з комбінаторними задачами для бінарних відношень. Тому виносимо їх на **самостійне опрацювання.** Розв'язання або відповіді для ряду задач відомі. **Загальне формулювання задач** такого типу таке, наприклад: „**Скільки бінарних відношень певного типу існує на множині, яка має n елементів?**“

Ось **відповідь** до однієї з них: „Знайти число r всіх повних функцій виду $f \subset X \times Y$, якщо множина X містить n елементів, а множина Y — m елементів“. **Відповідь:** $r = m^n$.

Відмітимо, що розв'язування таких задач навіть корисне з такої точки зору, що краще усвідомлюється будова відношень того чи іншого типу.

5.8 Питання для самоперевірки засвоєння знань та вправи

1. Чому в математиці вивчають властивості об'єктів та зв'язки між ними з теоретико-множинної точки зору?

2. Що означає вивчати певну властивість об'єктів з теоретико-множинної точки зору? Наведіть ілюструючі приклади.
3. Що означає вивчати бінарний зв'язок між елементами двох множин з теоретико-множинної точки зору?
4. Що таке бінарне відношення?
5. Що таке n-арне відношення?
6. Які бінарні відношення називаються однорідними, неоднорідними?
7. Наведіть приклади бінарних відношень з алгебри, з геометрії.
8. Що таке зріз бінарного відношення по елементу?
9. Що таке зріз бінарного відношення по підмножині?
10. Наведіть приклади зрізів бінарного відношення по елементу, по підмножині.
11. Дайте символічні записи означень зрізів бінарного відношення по елементу, по підмножині.
12. Що таке перша проекція бінарного відношення? Наведіть символічний запис означення першої проекції.
13. Що таке друга проекція бінарного відношення? Наведіть символічний запис її означення.
14. Як по-іншому називають проекції бінарного відношення?
15. Наведіть приклади бінарних відношень та вкажіть відповідні їм проекції.
16. Яке бінарне відношення називається повним? Як це можна виразати на елементарному рівні?
17. Яке бінарне відношення називається обернено повним? Як це можна виразити на елементарному рівні?
18. Як по-іншому можна назвати повні, обернено повні бінарні відношення?

19. Наведіть приклади повних, обернено повних бінарних відношень.

20. Вкажіть одну із важливих заслуг Бурбакі, яка була започаткована ними при викладенні основ математики.

21. В чому полягає спосіб задання бінарних відношень переліком пар та коли він здійснимий? Наведіть ілюструючі приклади

22. В чому полягає спосіб зображення бінарних відношень на мові діаграм? Наведіть ілюструючі приклади.

23. Вкажіть на конкретній діаграмі при зображенні бінарного відношення його проекції, зрізи та поясніть відповідність вживання назв „проекції“, „зріз“ відповідним зображенням їх на діаграмі.

24. В чому полягає спосіб задання бінарних відношень у вигляді матриць? Проілюструйте на конкретному прикладі.

25. В чому полягає табличний спосіб задання бінарного відношення та коли він здійснимий? Наведіть ілюструючі приклади.

26. В чому полягає графічний спосіб зображення неоднорідного бінарного відношення? Проілюструйте на конкретному прикладі.

27. Що таке граф однорідного бінарного відношення та коли його можна застосовувати? Проілюструйте на конкретному прикладі.

28. Що таке графік бінарного відношення, заданого на числовій множині? Проілюструйте на конкретному прикладі.

29. Що означає задати бінарне відношення характеристичною властивістю? Що виступає в ролі такої характеристичної властивості? Проілюструйте на прикладі.

30. Як пояснити, що бінарне відношення є не що інше як область істинності деякого двомісного предиката?

31. Чому рівносильні двомісні предикати задають одне і те ж саме бінарне відношення? Поясніть на прикладі.

32. Які відношення називаються рівними між собою? Запишіть означення їх рівності символічно.

33. Дайте означення включення бінарних відношень; наведіть ілюструючі приклади.

34. Які Ви знаєте теоретико-множинні операції над бінарними відношеннями? Проілюструйте їх на діаграмах.

35. Що таке перетин бінарних відношень? Наведіть ілюструючі приклади.

36. Що таке об'єднання бінарних відношень? Наведіть ілюструючі приклади.

37. Що таке доповнення бінарного відношення? Наведіть ілюструючі приклади.

38. Що таке різниця бінарних відношень? Наведіть ілюструючі приклади.

39. Що таке симетрична різниця бінарних відношень? Наведіть ілюструючі приклади.

40. Який зв'язок існує між рівністю відношень та їх включенням?

41. Що таке обертання бінарного відношення, обернене відношення до даного? Наведіть ілюструючі приклади.

42. Що таке композиція бінарних відношень? Проілюструйте на прикладах. Які Ви знаєте ще інші назви для композиції?

43. Проілюструйте на прикладі виконання нерівності $\rho \circ \varphi \neq \varphi \circ \rho$ при множенні бінарних відношень ρ, φ.

44. Поясніть, як можна звести довільне бінарне відношення до однорідного бінарного відношення.

45. Поясніть, до яких дій над матрицями зводяться відповідні операції над відношеннями, заданими в матричній формі.

46. Перелічіть деякі із співвідношень, що мають місце для операцій над бінарними відношеннями, та доведіть їх справедливість.

47. Перелічіть деякі із співвідношень, що мають місце для зрізів і проекцій бінарних відношень та розкривають їх взаємозв'язки з операціями над відношеннями; доведіть їх справедливість.

48. Дайте означення порожнього та універсального бінарних відношень та запишіть їх символічно.

49. Чому порожнє відношення називають „найменшим", а універсальне — „найбільшим"?

50. Знайти кількість всіх відношень на множині з n елементів.

51. Яке відношення називається повним? Наведіть ілюструючі приклади.

52. Яке відношення називається обернено повним? Наведіть ілюструючі приклади.

53. Яке відношення називають ефективним? Наведіть ілюструючі приклади.

54. Що таке об'єднана проекція бінарного відношення? Наведіть ілюструючі приклади.

55. Яке відношення називається повним сюр'єктивним відношенням? Наведіть ілюструючі приклади.

56. Як записати на елементарному рівні те, що бінарне відношення:

    а) повне;

    б) обернено повне;

    в) ефективне;

    г) повне сюр'єктивне?

57. Які Ви знаєте взаємозв'язки між:

    а)повними і обернено повними відношеннями;

    б) ефективними та оберненими до них відношеннями?

58. Доведіть, що бінарне відношення ефективне тоді і тільки тоді, коли його об'єднання з оберненим до нього відношенням є повним сюр'єктивним відношенням.

59. Проілюструйте на діаграмах повні, обернено повні, ефективні, повні сюр'єктивні бінарні відношення.

60. Яке відношення називається прямокутним? Наведіть ілюструючі приклади.

61. Яке відношення називається квадратним? Наведіть ілюструючі приклади.

62. Проілюструйте на діаграмах прямокутні та квадратні бінарні відношення.

63. Які Ви знаєте взаємозв'язки між прямокутними, квадратними, повними, обернено повними, ефективними та повними сюр'єктивними відношеннями?

64. Вкажіть області визначення та значень для прямокутних і квадратних бінарних відношень.

65. Яке відношення називається:

    а) частково тотожним;

    б) тотожним на заданій множині?

    Проілюструйте на конкретних прикладах.

66. Дайте означення частково тотожного відношення за допомогою тотожного відношення на заданій множині.

67. Встановіть взаємозв'язки між операціями над частково тотожними відношеннями та відповідними операціями над їх проекціями.

68. Який вигляд мають зображення на діаграмах частково тотожних відношень?

69. Дайте означення рефлексивного бінарного відношення та проілюструйте на прикладах.

70. Дайте означення частково рефлексивного бінарного відношення та проілюструйте на прикладах.

71. Дайте означення іррефлексивного бінарного відношення та проілюструйте на прикладах.

72. Який вигляд мають зображення на діаграмах рефлексивних, частково рефлексивних, іррефлексивних відношень?

73. Які Ви знаєте взаємозв'язки між рефлексивними, частково рефлексивними, іррефлексивними бінарними відношеннями?

74. Вкажіть „найменше", „найбільше" рефлексивне, частково рефлексивне, іррефлексивне бінарні відношення на заданій множині.

75. Виясніть, при яких операціях зберігається рефлексивність, іррефлексивність бінарних відношень на заданій множині.

76. Яке відношення називається симетричним? Проілюструйте на конкретних прикладах.

77. Дайте означення асиметричного відношення та проілюструйте на конкретних прикладах.

78. Дайте означення антисиметричного відношення та проілюструйте на конкретних прикладах.

79. Який вигляд мають означення симетричного, асиметричного та антисиметричного відношення на мові самих відношень та на елементарному рівні?

80. Які Ви знаєте рівносильні між собою співвідношення для симетричності бінарного відношення?

81. Які Ви знаєте рівносильні між собою співвідношення для асиметричності бінарного відношення?

82. Які Ви знаєте взаємозв'язки між симетричними, асиметричними та антисиметричними бінарними відношеннями?

83. Вкажіть „найменше", „найбільше" симетричне, асиметричне бінарні відношення на заданій множині.

84. Який вигляд мають на діаграмах зображеня симетричних, асиметричних, антисиметричних бінарних відношень?

85. Виясніть, при яких операціях зберігається симетричність, асиметричність, антисиметричність бінарних відношень на заданій множині.

86. Дайте означення транзитивного відношення на елементарному рівні та на мові відношення; проілюструйте на прикладах.

87. Дайте означення інтранзитивного відношення на елементарному рівні та на мові відношення; проілюструйте на прикладах.

88. Вкажіть „найменше“, „найбільше“ транзитивне бінарне відношення на заданій множині.

89. Доведіть, що відношення $\varphi = \bigcup\limits_{n \in N} \rho^n$, де $\rho \subset M \times M$ — довільне відношення на множині M, транзитивне на цій множині.

90. Доведіть, що перетин транзитивних, відношень на заданій множині є транзитивним відношенням на цій множині. З'ясувати, чи виконується така властивість для інтранзитивних відношень.

91. Чи може відношення бути одночасно транзитивним та інтранзитивним? Наведіть ілюструючі приклади.

92. Яке відношення називається зв'язним? Проілюструйте на конкретних прикладах.

93. Яке відношення називається частково зв'язним? Проілюструйте на конкретних прикладах.

94. Виясніть, при яких операціях зберігається зв'язність,часткова зв'язність бінарних відношень на заданій множині.

95. Який вигляд мають на діаграмах зображення зв'язних, частково зв'язних бінарних відношень?

96. Що таке еквівалентність на множині? Проілюструйте конкретними прикладами.

97. Які позначення вживаються для еквівалентності?

98. Чому вважають, що відношення еквівалентності є узагальненням поняття рівності на множині певних об'єктів? Поясніть на конкретних прикладах.

99. Дайте означення розбиття множини на класи та наведіть ілюструючі приклади.

100. Що таке клас еквівалентності з певним представником? Проілюструйте на прикладах.

101. Що таке фактор-множина по заданій еквівалентності та як вона позначається? Наведіть ілюструючі приклади.

102. Сформулюйте пряму і обернену теорему про взаємозв'язок між еквівалентностями та розбиттями множини на класи.

103. Поясніть, чому вказані вище дві теореми розкривають будову еквівалентності. Проілюструйте на прикладах цю будову.

104. Який вигляд має на діаграмі зображення еквівалентності?

105. Як пояснити, що між еквівалентностями множини та розбиттями цієї множини встановлюється взаємно однозначна відповідність? Чим корисна така відповідність на практиці?

106. Поясніть на конкретному прикладі, як введення певної еквівалентності на множині допомагає краще аналізувати цю множину.

107. Поясніть на конкретних прикладах, як, вживаючи те чи інше поняття, ми завжди використовуємо клас по певній еквівалентності на деякій множині.

108. Що собою представляють „найменша“ та „найбільша“ еквівалентності на заданій множині?

109. Яку максимальну та мінімальну кількість класів може мати фактор-множина по певній еквівалентності на заданій множині?

110. Довести, що перетин еквівалентностей на множині є еквівалентністю на цій множині.

111. Вказати необхідні і достатні умови того, щоб:

 а) об'єднання;

 б) композиція

 еквівалентностей на заданій множині була еквівалентністю на цій множині.

112. Дайте означення часткової еквівалентності на множині та проілюструйте на прикладах.

113. Доведіть, що часткова еквівалентність частково рефлексивна на заданій множині.

114. Сформулюйте критерії того, щоб часткова еквівалентність на множині була еквівалентністю на цій множині.

115. Доведіть, що перетин часткових еквівалентностей на множині є частковою еквівалентністю на цій множині.

116. Встановіть критерії того, щоб:

 а) об'єднання;

 б) композиція (часткових) еквівалентностей на множині була (частковою) еквівалентністю на цій множині.

117. Вкажіть „найменшу“ і „найбільшу“ часткові еквівалентності на заданій множині та вкажіть „найменшу“ і „найбільшу“ еквівалентності, що містять задану часткову еквівалентність.

118. Який вигляд має на діаграмах зображення часткової еквівалентності?

119. Чи можна ввести поняття фактор-множини для часткової еквівалентності?

120. Чи матимуть місце аналоги теореми про взаємозв'язок між еквівалентностями та розбиттями множини у випадку часткових еквівалентностей на множині?

121. Дайте означення часткової квазіеквівалентності (часткової толерантності) та проілюструйте на прикладах.

122. Дайте означення толерантності та проілюструйте на конкретних прикладах.

123. Який вигляд мають співвідношення, якими дається означення часткової толерантності?

124. Які Ви знаєте взаємозв'язки часткової толерантності з толерантністю?

125. Які Ви знаєте взаємозв'язки часткової толерантності та толерантності з частковою еквівалентністю та еквівалентністю?

126. Доведіть, що перетин, об'єднання (часткових) толерантностей на заданій множині є (частковою) толерантністю на цій множині.

127. Вкажіть „найменшу", „найбільшу"(часткову) толерантність на заданій множині.

128. Який вигляд мають на діаграмах зображення толерантності, часткової толерантності?

129. З якою метою вводяться відношення порядків на тих чи інших множинах? Чим вони відрізняються від еквівалентності?

130. Дайте означення порядку (предпорядку) на мові відношень та на елементарному рівні.

131. Яке відношення називається строгим порядком на множині? Проілюструйте на конкретних прикладах.

132. Яке відношення називається нестрогим порядком на множині? Проілюструйте на конкретних прикладах.

133. Вкажіть взаємозв'язок між строгим і нестрогим порядками на множині.

134. Наведіть різні означення строгого порядку та доведіть їх рівносильність між собою.

135. Дайте означення строгого лінійного порядку та проілюструйте на прикладах.

136. Дайте означення нестрогого лінійного порядку та проілюструйте на прикладах.

137. Дайте означення строгого нелінійного (часткового) порядку та проілюструйте на прикладах.

138. Дайте означення нестрогого нелінійного (часткового) порядку та проілюструйте на прикладах.

139. Доведіть, що обернене відношення до відношення порядку певного виду є порядком того ж самого виду на тій же множині.

140. Доведіть, що перетин порядків певного виду є порядком того ж самого виду на тій же множині (без врахування їх лінійності).

141. Яка множина називається впорядкованою? Наведіть ілюструючі приклади.

142. Що таке обмеження впорядкованої множини? Наведіть ілюструючі приклади.

143. Доведіть, що вид порядку на обмеженні впорядкованої множини зберігається?

144. Що таке мажоранта, мінoранта підмножини впорядкованої множини? Проілюструйте на прикладах.

145. Який елемент називається найбільшим елементом підмножини впорядкованої множини? Проілюструйте на конкретних прикладах.

146. Який елемент називається найменшим елементом підмножини впорядкованої множини? Проілюструйте на конкретних прикладах.

147. Чи можливий такий випадок, коли найбільший елемент співпадає з найменшим елементом підмножини впорядкованої множини?

148. Який елемент називається точною верхньою гранню підмножини впорядкованої множини? Проілюструйте на конкретних прикладах.

149. Який елемент називається точною нижньою гранню підмножини впорядкованої множини? Проілюструйте на конкретних прикладах.

150. Який елемент називається максимальним елементом підмножини впорядкованої множини? Проілюструйте на конкретних прикладах.

151. Який елемент називається мінімальним елементом підмножини впорядкованої множини? Проілюструйте на конкретних прикладах.

152. Які Ви знаєте взаємозв'язки між:

    а) максимальними елементами, найбільшими елементами, точними верхніми гранями;

    б) мінімальними елементами, найменшими елементами, точними нижніми гранями

    підмножини впорядкованої множини?

153. Скільки дана підмножина впорядкованої множини може мати:

    а)максимальних і мінімальних елементів;

    б) найбільших і найменших елементів;

    в) точних верхніх граней, точних нижніх граней?

    Проілюструйте на прикладах.

154. Дайте означення:

    а) інтервала;

    б) відрізка;

    в) напіввідрізка

    на впорядкованій множині та проілюструйте на конкретних прикладах.

155. Які елементи на множині називаються сусідніми? Наведіть ілюструючі приклади.

156. Що таке діаграма Хассе та як вона будується?

157. Проілюструйте на конкретному прикладі побудову діаграми Хассе та виясніть на ній основні елементи впорядкованої множини.

158. Чому лінійно впорядковану множину іноді називають ланцюгом? Коли цей ланцюг має початок або кінець?

159. Яка множина називається цілком впорядкованою? Наведіть ілюструючі приклади.

160. Які впорядковані множини володіють умовою мінімальності?

161. Чому до цілком впорядкованих множин можна застосовувати індукцію, яка є узагальненням математичної індукції для натуральних чисел?

162. Що таке мажорантна, мінорантна решітки? Наведіть ілюструючі приклади.

163. Що таке решітка? Наведіть ілюструючі приклади.

164. Чому лінійно впорядкована множина є решіткою?

165. Який вигляд має діаграма Хассе для решітки?

166. Що таке повна мажорантна решітка? Наведіть ілюструючі приклади.

167. Що таке повна мінорантна решітка? Наведіть ілюструючі приклади.

168. Що таке повна решітка? Наведіть ілюструючі приклади.

169. Який Ви знаєте зв’язок решіток з повними решітками?

170. Вкажіть критерій того, щоб решітка була повною решіткою.

171. Що таке квазіпорядок на множині? Наведіть ілюструючі приклади.

172. Які Ви знаєте взаємозв'язки квазіпорядків з порядками та еквівалентностями?

173. Доведіть, що перетин квазіпорядків на множині є квазіпорядком на цій же множині.

174. Сформулюйте критерії того, щоб квазіпорядок на множині був:

    а)нестрогим порядком;

    б) еквівалентністю

    на цій же множині та доведіть їх.

175. Доведіть теорему про „переростання“ квазіпорядку $\rho \subset M \times \times M$ в порядок $\omega_\rho = \{(\varepsilon_\rho\langle a\rangle, \varepsilon_\rho\langle b\rangle) | (a; b) \in \rho\}$, де $\varepsilon_\rho = \rho \cap \rho^{-1}$, на фактор-множині M/ε_ρ.

176. Поясніть на прикладах, чому квазіпорядок на множині вказує на внутрішній взаємозв'язок між еквівалентностями та порядками.

177. Що таке квазівпорядкована множина?

178. Який квазіпорядок на множині називається лінійним? Наведіть ілюструючі приклади.

179. Яке відношення на множині називається відношенням домінування? Наведіть ілюструючі приклади.

180. Які Ви знаєте критерії того, щоб відношення на множині було домінуванням на цій множині? Доведіть їх справедливість.

181. Яке бінарне відношення між множинами називається функцією? Проілюструйте на прикладах.

182. Що таке область визначення і область значень функції, та як вони позначаються? Наведіть ілюструючі приклади.

183. Дайте означення функції на мові зрізів бінарного відношення.

184. Які позначення та назви використовують при розгляді функцій?

185. Дайте означення рівності функцій на мові пар відношення або на мові зрізів відношення.

186. Дайте означення обмеження, розширення функцій та проілюструйте на прикладах.

187. Як зв'язати поняття рівності функцій з поняттями їх обмежень, розширень? Виразіть цей зв'язок у вигляді логічної еквівалентності.

188. Які функції називаються повними, частковими? Наведіть ілюструючі приклади.

189. Що таке повне, часткове відображення множини? Які назви та позначення вживаються при цьому?

190. Дайте означення сюр'єкції множини на множину; проілюструйте на конкретних прикладах.

191. Як пояснити, що довільну функцію можна вважати одночасно і деякою сюр'єкцією певної множини на множину?

192. Дайте означення часткового та повного перетворень множини; наведіть ілюструючі приклади.

193. Наглядно зобразіть функціональний зв'язок у вигляді стрілок для:

    а) неповної функції;

    б)повної функції;

    в) сюр'єкції.

194. Чому бінарне відношення загального виду іноді називають багатозначною функцією та як з нього можна утворити відповідну функцію? Наведіть ілюструючі приклади.

195. Як ввести означення функції двох змінних?

196. Як ввести бінарну операцію, часткову операцію, використавши поняття функції двох змінних? Наведіть ілюструючі приклади.

197. Які Ви знаєте способи задання та зображення функції?

198. В чому полягає аналітичний спосіб задання функції? Наведіть ілюструючі приклади.

199. В чому полягає табличний спосіб задання функції? Наведіть ілюструючі приклади.

200. Що таке числова функція? Проілюструйте на конкретних прикладах.

201. В чому полягає графічний спосіб задання числових функцій та що таке графік функцій? Проілюструйте на конкретних прикладах. Охарактеризуйте переваги та недоліки кожного із способів задання та зображення функцій.

202. Охарактеризуйте переваги та недоліки кожного із способів задання та зображення функцій.

203. Які Ви ще знаєте способи задання функцій, крім перелічених вище?

204. Яке бінарне відношення називається обернено однозначним? Наведіть відповідне означенню елементарне співвідношення. Проілюструйте на прикладах.

205. Дайте означення ін'єктивного бінарного відношення на мові відношень та на елементарному рівні; наведіть ілюструючі приклади.

206. Дайте наглядне зображення ін'єктивної функції у вигляді стрілок, що з'єднують деякі точки обох множин.

207. Наведіть різні назви, що вживаються для ін'єктивних функцій.

208. Що таке бієкція між двома множинами? Наведіть ілюструючі приклади.

209. Поясніть, чому довільну ін'єктивну функцію можна вважати одночасно і деякою бієкцією між певними множинами. Проілюструйте на прикладі.

210. Дайте означення підстановки на множині та проілюструйте на прикладах.

211. Яку особливість має графік оборотної числової функції? Проілюструйте на відповідному графіку.

212. Вкажіть зв'язок між областями визначення та значень для взаємно обернених функцій та проілюструйте його на прикладах.

213. Які Ви знаєте критерії того, щоб бінарне відношення було:

    а) функцією;

    б) обернено однозначним;

    в) ін'єкцією;

    г) бієкцією;

    д) підстановкою

    на мові самого відношення та частково тотожних відношень? Доведіть деякі з них.

214. Доведіть критерії того, що одна із функцій є продовженням іншої з них на мові самих функцій.

215. Доведіть критерій сумісності функцій.

216. Доведіть критерій того, що повне перетворення є інволюцією.

217. Доведіть, що композиція:

    а) функцій є функцією;

    б) обернено однозначних відношень є обернено однозначним відношенням;

    в) ін'єкцій є ін'єкцією.

218. Доведіть критерій однозначності бінарного відношення на мові перетинів зрізів підмножин.

219. Доведіть критерій ін'єктивності функції на мові перетинів зрізів підмножин.

220. Що таке ядро функції? Проілюструйте на прикладах.

221. Доведіть, що ядро функції є частковою еквівалентністю, а ядро повної функції — еквівалентністю множини, на якій задана функція.

222. Доведіть, що ядро ε_f функції f виражається такою рівністю: $\varepsilon_f = f^{-1} \circ f$.

223. Як утворюється фактор-множина по ядру функції? Проілюструйте на прикладі скінченних множин та на схематичному малюнку.

224. Поясніть, який вигляд має ядро та відповідна фактор-множина для ін'єктивної функції.

225. Що таке канонічна (природна) сюр'єкція, яка відповідає заданій частковій еквівалентності? Як вона утворюється? Поясніть на конкретному прикладі.

226. Дайте означення дифункціонального (квазіоднозначного) бінарного відношення на мові зрізів відношення.

227. Доведіть, що відношення $\rho \subset X \times Y$ квазіоднозначне тоді і тільки тоді, коли виконується рівність $\rho \circ \rho^{-1} \circ \rho = \rho$.

228. Поясніть, що квазіоднозначні відношення є узагальненням часткових еквівалентностей та функціональних і обернених до них відношень.

229. Доведіть, що перетин дифункціональних відношень є дифункціональне відношення.

230. Доведіть, що обертання квазіоднозначного відношення зберігає його квазіоднозначність.

231. Вкажіть критерій того, щоб квазіоднозначне відношення було (частковою) еквівалентністю, та доведіть його.

232. Доведіть критерій квазіоднозначності бінарного відношення на мові його ядра.

233. Доведіть теорему, яка розкриває будову квазіоднозначного відношення $\rho = \bigcup\limits_{i \in I} (X_i \times Y_i)$ як об'єднання „прямокутників“ $(X_i \times Y_i)$ — декартових добутків, які не перетинаються між собою.

234. Дайте наглядне зображення квазіоднозначного відношення на діаграмі.

235. Дано: $A = \{1, 2, 3\}$; $B = \{1, 3, 5, 6\}$. Задати відношення $\alpha, \beta, \gamma \subset A \times B$: а) переліком пар; б) графічно; в) матрицею, якщо

а) $(x; y) \in \alpha \overset{df}{\Longleftrightarrow} (x + y)\vdots 2$;

б) $(x; y) \in \beta \overset{df}{\Longleftrightarrow} x + y = 4$;

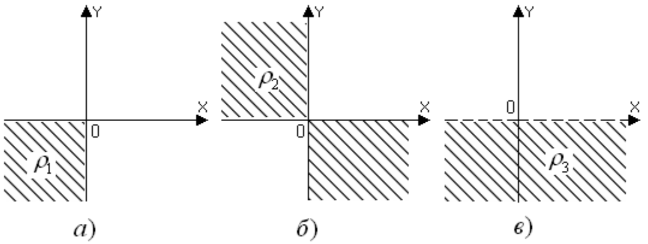
в) $(x; y) \in \gamma \overset{df}{\Longleftrightarrow} x + y \leqslant 5$.

Для кожного з відношень вказати область визначення і область значень.

236. Задати однорідне відношення $\rho =$„$x \vdots y$“ на множині M_9: а) переліком пар; б) таблицею; в) графіком; г) графом.

237. Бінарні відношення задані графічно (див. малюнок 1.52 на сторінці 280). Задати ці відношення предикатами.

238. Побудувати графіки $\rho_1 \cup \rho_2$, $\rho_2 \cup \rho_3$, $\rho_1 \cap \rho_3$, $\rho_1 \setminus \rho_2$ та задати їх предикатами, якщо ρ_1, ρ_2, ρ_3 — відношення з вправи 237.



Мал. 1.52.

239. На множині $M_5 = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ дано відношення $\rho_1 = \{(1;2), (4;2), (2;2), (2;3), (3;4), (1;5)\}$; $\rho_2 = \{(4;1), (3;2), (2;1), (5;2)\}$. Знайти $\rho_2 \circ \rho_1$, $\rho_1 \circ \rho_2$, $\rho_1 \circ \rho_1$, $\rho_2 \circ \rho_1^{-1}$, $\rho_2 \circ \rho_2^{-1}$ та записати їх перші, другі та об'єднані проекції.

240. На множині L людей задано родинні відношення:

   $(a;b) \in \rho_1 \overset{df}{\Longleftrightarrow} a$ — син b;

   $(a;b) \in \rho_2 \overset{df}{\Longleftrightarrow} a$ — мати b;

   $(a;b) \in \rho_3 \overset{df}{\Longleftrightarrow} a$ — батько b.

   Виразити через ці відношення інші родинні відношення (наприклад, a — дід b, a — бабуся b, a— брат b і т.п.).

241. На координатній площині задано коло радіуса 5 з центром в точці $(2;3)$ як графік бінарного відношення ρ. Записати це відношення в аналітичній формі за допомогою предиката та знайти зріз $\rho\langle 5\rangle$, $pr_1\rho$, $pr_2\rho$, $pr\rho$.

242. Нехай ρ — відношення подільності чисел на множині M_9. З'ясувати, що представляють собою відношення $\rho^{-1} \circ \rho$, $\rho \circ \rho^{-1}$, $\overline{(\rho \circ \rho^{-1})}$.

243. Задано відношення:

   а) $\rho = \{(x;y) | x + y \leqslant 0\} \subset \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$;

   б) $\rho = \{(x;y) | 3x \leqslant 2y\} \subset \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$,

   де $\mathbb{Q}$ — множина раціональних чисел. Знайти $pr_1\rho$, $pr_2\rho$, $\rho \circ \rho$, $\rho^{-1} \circ \rho$, $\rho \circ \rho^{-1}$.

244. Знайти кількість всіх бінарних відношень $\rho \subset A \times B$, якщо A містить m елементів, B — n елементів.

245. * Дослідити властивості бінарної операції $*$ для однорідних бінарних відношень, якщо $\rho_1 * \rho_2 \overset{df}{=} \overline{(\overline{\rho_1} \circ \overline{\rho_2})}$, де $\rho_1, \rho_2 \subset A \times A$ — довільні однорідні бінарні відношення між елементами множини A.

246. На множині $\mathbb{R}$ дійсних чисел задано бінарні відношення:

а) $\rho_1 = \{(x;y)|y^2 - x^2 = 0\}$;

б) $\rho_2 = \{(x;y)|x^2 + y^2 \leqslant 4 \wedge xy \geqslant 0\}$;

в) $\rho_3 = \{(x;y)|x + y \leqslant 2 \wedge y \leqslant x \wedge 0 \leqslant y\}$.

Знайти їх області визначення та значень і побудувати їх графіки.

247. Довести, що для довільних бінарних відношень виконуються співвідношення:

а) $pr_1(\varphi \circ \rho) \subset pr_1\rho$;

б) $pr_2(\varphi \circ \rho) \subset pr_2\varphi$;

в) $pr_1(\varphi \circ \rho) = \breve{\rho}^{-1}(pr_1\varphi)$;

г) $pr_2(\varphi \circ \rho) = \breve{\varphi}(pr_2\rho)$,

де $\rho \subset A \times B$; $\rho \subset B \times C$.

248. Дослідити, якими відомими з теорії бінарних відношень властивостями (рефлексивність, симетричність, досконалість тощо) володіють наступні бінарні відношення:

а) „x — батько або мати y“ на множині L всіх людей;

б) „$x \leqslant y$“ на множині $\mathbb{Z}$ цілих чисел;

в) „$x \vdots y$“ на множині $\mathbb{Z}$ цілих чисел;

г) „різниця чисел x і y ділиться на 4“ на множині $\mathbb{Z}$ цілих чисел;

д) „$x \perp y$“ на множині прямих на площині;

е) „$x \parallel y$“ на множині прямих на площині;

є) „x — брат y“ на множині L всіх людей;

ж) „x проживає з y“ в одному гуртожитку на множині всіх студентів інституту;

з) „x має спільну точку з y“ на множині прямих на площині;

и) „x відрізняється однією буквою від y“ на множині слів;

і) „x важче за y“ на множині студентів групи;

ї) „x взаємно просте з y“ на множині $\mathbb{N}$ натуральних чисел;

й) „площа x рівна площі y“ на множині многокутників на площині.

249. * Знайти число всіх бінарних відношень на множині M_n, які мають властивість бути:

а) прямокутним;
б) квадратним;
в) частково тотожним;
г) повним;
д) обернено повним;
е) повним і сюр'єктивним;
є) симетричним;
ж) асиметричним;
з) антисиметричним;
и) досконалим;
і) частково досконалим;
ї) рефлексивним;
й) частково рефлексивним;
к) іррефлексивним;
л) інволюцією;
м) толерантним;
н) частково толерантним;
о) функціональним;
п) обернено функціональним;
р) повним перетворенням M_n;
с) ін'єкцією M_n;
т) підстановкою M_n.

250. * Дослідити множину всіх бінарних відношень на множині M, які володіють однією з властивостей, відмічених у вправі 249, відносно відомих операцій над відношеннями. Наприклад, нехай $R(M)$ — множина всіх рефлексивних бінарних відношень, заданих на множині M, і нехай $\rho_1, \rho_2 \subset M \times M$ — рефлексивні відношення на M; дослідити, при яких умовах відношення: ρ_1^{-1}, $\rho_1 \cap \rho_2$, $\rho_1 \cup \rho_2$, $\overline{\rho_1}$, $\rho_2 \circ \rho_1$, $\rho_1 \setminus \rho_2$, $\rho_1 - \rho_2$ будуть рефлексивними.

251. Нехай $S(M)$ — множина всіх бінарних відношень на множині, які володіють однією з властивостей, відмічених у вправі 249. Вияснити, чи перетин (об'єднання) довільного сімейства відношень з $S(M)$ належить S(M). У випадку позитивної відповіді показати, що для довільного бінарного відношення існує найменше (найбільше) відношення з S(M), яке містить (міститься в) ρ, та виразити його за допомогою ρ формулою.

252. * Нехай на множині M задано бінарне відношення $\rho \subset \subset M \times M$. Введемо на множині $\mathfrak{P}(M)$ відповідне **глобальне відношення** $\breve{\rho} \overset{df}{\subset} \mathfrak{P}(M) \times \mathfrak{P}(M)$ за допомогою рівності

$\breve{\rho} \overset{df}{=} \{(X;Y) | X, Y \subset M \wedge Y = \breve{\rho}(X)\}$. Дослідити, чи зберігаються відмічені у вправі 249 властивості бінарних відношень при переході до глобального відношення.

253. З'ясувати, які з наведених у вправі 248 відношень є:

 а) толерантними;

 б) частково толерантними;

 в) еквівалентними;

 г) частково еквівалентними.

 У випадку еквівалентних та частково еквівалентних відношень описати, якою отримується відповідна фактор-множина.

254. На множині $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ задано відношення $\varepsilon \subset (\mathbb{N} \times \mathbb{N}) \times (\mathbb{N} \times \mathbb{N})$ за допомогою співвідношення $(m;n) \equiv (k;l)(\varepsilon) \overset{df}{\Longleftrightarrow} m+l = n+k$. Показати, що ε є еквівалентністю на $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Описати, що собою представляють ε-класи.

255. На площині проведена пряма. На які три класи розбивається цією прямою множина всіх точок площини.

256. На множині $M_{20} = \{1, 2, ..., 20\}$ знайти класи розбиття такі, щоб в один клас попали числа з одним і тим же залишком при їх діленні на 5. Скільки отрималось класів? Чи перетинаються вони між собою?

257. Наведіть приклади відношень, які:

 а) рефлексивні і транзитивні, але не симетричні;

 б) симетричні і транзитивні, але не рефлексивні;

 в) рефлексивні і симетричні, але не транзитивні;

 г) рефлексивні і транзитивні, але не антисиметричні.

258. Довести, що повне, симетричне і транзитивне відношення на множині M є еквівалентністю на M.

259. Для кожного з наступних відношень вибрати множину, на якій воно задано, та з'ясувати, чи є серед них: еквівалентності,

толерантності, порядки, квазіпорядки, часткові еквівалентності, часткові порядки, лінійні порядки:

а) „такий же високий, як“;

б) „проживає в тому ж місті , що і“;

в) „вчиться в одній групі з“;

г) „рівний“;

д) „менше за“;

е) „не важчий за“.

260. Показати, що множина $\{\{2,\ 7\};\ \{1,\ 3,\ 4\}\ ;\ \{5,\ 6\}\}$ є розбиттям множини M_7. Побудувати графік еквівалентності, яка відповідає цьому розбиттю.

261. Якими властивостями володіють наступні відношення, задані на множині $\mathbb{Z}$ цілих чисел:

а) $\{(x;y)||x|-|y|=0\}$;

б) $\{(x;y)|x\leqslant y+2\}$;

в) $\{(x;y)|y^2-x^2=0\}$;

г) $\{(x;y)|y\leqslant x\}$;

д) $\{(x;y)|x^2+y^2=4\}$;

е) $\{(x;y)|x-y=y^2-x^2\}$;

є) $\{(x;y)|x+y\leqslant 6\}$;

ж) $\{(x;y)|y<x\}$;

з) $\{(x;y)|y\neq x\}$;

и) $\{(x;y)|x\,\vdots\,y\}$?

262. З'ясувати, чи утворює розбиття

а) множина підмножин всіх раціональних та ірраціональних чисел множини $\mathbb{R}$ дійсних чисел;

б) множина підмножин квадратів, ромбів, прямокутників, трапецій множини всіх чотирикутників площини;

в) множина підмножин рівнобедрених, рівносторонніх, прямокутних і гострокутних трикутників множини всіх трикутників площини;

г) множина всіх курсів студентів інституту.

263. Нехай $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \subset M \times M$ — еквівалентності на множині M. Довести, що $\varepsilon_1 \subset \varepsilon_2$ тоді і тільки тоді, коли виконується одна з таких умов:

а) $\varepsilon_2 \circ \varepsilon_1 = \varepsilon_2$;

б) $\varepsilon_1 \circ \varepsilon_2 = \varepsilon_2$;

в) кожен ε_2-клас є об'єднанням деяких ε_1-класів.

264. Довести, що для довільного відношення $\rho \subset X \times Y$ виконуються такі співвідношення:

а) $\rho^{-1} \circ \rho \subset X \times X$, $\rho \circ \rho^{-1} \subset Y \times Y$ — часткові толерантності;

б) $\rho^{-1} \circ \rho = \bigcup\limits_{y \in Y} (\rho^{-1}\langle y \rangle \times \rho^{-1}\langle y \rangle)$; $\rho \circ \rho^{-1} = \bigcup\limits_{x \in X} (\rho\langle x \rangle \times \rho\langle x \rangle)$.

265. * Дослідити множину всіх бінарних відношень на множині M, які є:

а) толерантними;

б) частково толерантними;

в) еквівалентностями;

г) частковими еквівалентностями

відносно відомих операцій над відношеннями (див. аналогічну вправу 250.

266. * Розглянути вправу 251 для того випадку, коли бінарні відношення є:

а) толерантними;

б) частково толерантними;

в) еквівалентностями;

г) частковими еквівалентностями.

267. * Знайти число всіх:

    а) толерантних;

    б) частково толерантних;

    в) еквівалентних;

    г) частково еквівалентних відношень на множині M_n.

268. * Нехай $\rho \subset X \times Y$ — довільне бінарне відношення, а $\varepsilon_\rho \overset{df}{=} \{(x_1; x_2) | \rho\langle x_1\rangle = \rho\langle x_2\rangle \neq \varnothing\rangle\} \subset X \times X$ — його **ядро**. Довести, що:

    а) ε_ρ — часткова еквівалентність, яка є еквівалентністю множини X тоді і тільки тоді, коли $pr_1\rho = X$;

    б) відношення $\rho \subset X \times Y$ має такий канонічний розклад у вигляді об'єднаня декартових добутків множин:

$$\rho = \bigcup_{A \in pr_1\rho/\varepsilon_\rho} (A \times \breve{\rho}(A));$$

    в) **розширене ядро** $\varepsilon^*_\rho \overset{df}{=} \{(x_1; x_2) | \rho\langle x_1\rangle = \rho\langle x_2\rangle\} \subset X \times X$ відношення $\rho \subset X \times Y$ є еквівалентністю на X;

    г) $\varepsilon^*_\rho = \rho$ тоді і тільки тоді, коли $\rho \subset X \times X$ є еквівалентністю на X.

269. Нехай $f(x)$ — деякий фіксований многочлен з дійсними коефіцієнтами, а $\varepsilon_f = \{(a; b) | f(a) = f(b) \wedge a, b \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ — бінарне відношення на множині $\mathbb{R}$ дійсних чисел. Перевірити, що ε_f — відношення еквівалентності на $\mathbb{R}$. Вияснити, для яких многочленів всі класи еквівалентності по ε_f містять точно k елементів, не більше k елементів, де $k \in \mathbb{N}$ — фіксоване натуральне число.

270. Дослідити, які з наведених у вправах 248, 261 відношень є порядками і якого саме виду.

271. Показати, що відношення $\omega = \{(k; l) | k \vdots l\}$ на множині M_{12} є нестрогим нелінійним порядком. Вказати всі особливі елементи впорядкованої множини $(M_{12}; \omega)$. Намалюйте відповідну діаграму Хассе.

272. Поясніть, чому в скінченній впорядкованій множині завжди є мінімальні, максимальні елементи.

273. Нехай $(F_n; \subset)$ — впорядкована включенням множина всіх підмножин множини $\mathbb{N}$ натуральних чисел, які містять не більше n чисел. Знайдіть особливі елементи цієї впорядкованої множини.

274. Довести, що множини $(\mathfrak{P}(M); \subset)$, $(\mathbb{N}; \vdots)$ є такими впорядкованими множинами, що вони є решітками, причому $(\mathfrak{P}(M); \subset)$ — повна решітка, а $(\mathbb{N}; \vdots)$ — неповна решітка.

275. * Знайти кількість всіх:

    а) лінійних порядків на множині M_n;

    б) нелінійних порядків на множині M_n.

276. Довести, що впорядкована включенням множина $(\varepsilon(M); \subset)$ всіх еквівалентностей на множині M є решіткою.

277. Чи можна доповнити наступні відношення:

    а) $\rho_1 = \{(2;2), (2;1), (1;5), (4;4), (3;2)\}$;

    б) $\rho_2 = \{(1;3), (3;2), (3;5)\}$;

    в) $\rho_3 = \{(2;1), (3;4), (4;3)\}$

    до відношення нелінійного строгого порядку, нелінійного нестрогого порядку, лінійного строгого порядку, лінійного нестрогого порядку на множині M_5?

278. Нарисувати діаграму Хассе для впорядкованої множини $(M; \vdots)$ та вказати її особливі елементи, якщо $M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 12, 15, 30\}$.

279. Довести, що множина $(M_7; \omega)$ впорядкована, вказати її особливі елементи і побудувати діаграму Хассе, якщо $\omega = \{(x; y) | x - y \geqslant 0 \wedge (x - y) \vdots 2\} \subset M_7 \times M_7$.

280. Вказати всі особливі елементи для впорядкованої множини $(F; \subset)$, де F — множина всіх непорожніх скінченних множин множини $\mathbb{N}$ натуральних чисел.

281. Нехай ω — нестрогий порядок на множині M. Довести, що для довільних елементів $x, y \in M$ виконуються співвідношення:

$$\omega^{-1}\langle x\rangle = \omega^{-1}\langle y\rangle \Leftrightarrow x = y;$$

$$\omega^{-1}\langle x\rangle \subset \omega^{-1}\langle y\rangle \Leftrightarrow (x, y) \in \omega.$$

282. * Повне відображення $f : M \longrightarrow \overline{M}$ називається **ізотонним,** якщо виконується співвідношення:

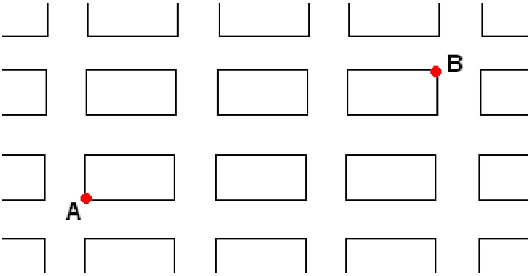
$$(\forall x, y \in M)((x; y) \in \omega \to (f(x); f(x)) \in \overline{\omega})$$

для впорядкованих множин $(M; \omega)$, $(\overline{M}; \overline{\omega})$. Знайти число всіх ізотонних відображень M_n в M_m для впорядкованих множин $(M_n; \leqslant)$, $(M_m; \leqslant)$. Довести, що f — ізотонне відображення тоді і тільки тоді, коли $f \circ \omega \circ f^{-1} \subset \overline{\omega}$.

283. * Населений пункт розбитий вулицями на квартали. Скільки існує найкоротших шляхів, щоб з пункта A добратися до пункту B і при цьому необхідно пройти m кварталів по горизонталі і n кварталів по вертикалі (мал. 1.53 на сторінці 289)?

284. Дослідити, які з наведених у вправах 248, 261 відношень є квазіпорядками, домінуваннями.

285. Дослідити множину всіх бінарних відношень на множині M, які є:



Мал. 1.53.

а) квазіпорядками;

б) домінуваннями;

в) порядками певного виду відносно відомих операцій над відношеннями (див. аналогічну вправу 250).

286. * Знайти число всіх:

а) квазіпорядків;

б) домінувань;

в)порядків певного виду на множині M_n.

287. * Розглянути вправу 251 для того випадку, коли бінарні відношення є: а) квазіпорядками; б) домінуваннями; в) порядками певного виду.

288. Нехай $\rho \subset X \times Y$ — довільне бінарне відношення. Відношення $\xi_\rho \overset{df}{=} \{(x_1; x_2) | \rho\langle x_2\rangle \subset \rho\langle x_1\rangle\} \subset X \times X$ називається **квазіядром відношення** ρ. Довести, що:

а) ξ_ρ — квазіпорядок на X;

б) $\xi_\rho^{-1} \subset X \times X$ — найбільше бінарне відношення, що задовольняє умову $\rho \circ \xi_\rho^{-1} \subset \rho$;

в) рефлективність бінарного відношення рівносильна тому, що воно містить своє квазіядро;

г) транзитивність бінарного відношення рівносильна тому, що воно включається в своє квазіядро;

д) відношення є квазіпорядком тоді і тільки тоді, коли воно співпадає зі своїм квазіядром.

289. Вияснити, які з наступних відношень є функціями (відображеннями) і якого виду, вказати їх області визначення та значень та побудувати відповідні графіки:

а) $\{(x; y) | y = x^2\} \subset \mathbb{N} \times \mathbb{N}$;

б) $\{(x; y) | x < y \leqslant x + 1\} \subset \mathbb{N} \times \mathbb{N}$;

в) $\{(x; y) | y = x^3\} \subset \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$;

г) $\{(x; y) | y = |x|\} \subset \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$;

д) $\{(x;y)|x=y^2\} \subset \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$;

е) $\{(x;y)|y \,\vdots\, x\} \subset \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$;

є) $\{(x;y)|y=2x+1\} \subset \mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

290. Показати, що вказані відношення є оборотними функціями; вказати обернені до них функції, побудувати відповідні графіки та записати їх області визначення та значень:

а) $f=\{(x;y)|y=2x+1\} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$;

б) $f=\{(x;y)|y=x^3\} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$;

в) $f=\{(x;y)|y=\sqrt{4-x} \wedge 0 \leqslant x \leqslant 4\} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$;

г) $f=\{(x;y)|y=\dfrac{x}{x-1} \wedge -2 \leqslant x < 1\} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

291. Задати аналітично бієкцію між множинами:

а) $(-\infty;0)$ і $\mathbb{R}$;

б) $\mathbb{Z}$ і $2Z$;

в) $[0;3]$ і $[0;1]$;

г) $\mathbb{R}$ і $(0;+\infty)$;

д) $[2;3]$ і $[4;15]$;

е) $\mathbb{N}$ і $\{-n|n \in \mathbb{N}\}$;

є) $\mathbb{R}$ і $\mathbb{R}$;

ж) $(-2;2)$ і $\mathbb{R}$.

292. * Скільки існує:

а) часткових функцій $f \subset M_n \times M_m$;

б) повних функцій $f \subset M_n \times M_m$;

в) сюр'єкцій $f \subset M_n \xrightarrow{\text{на}} M_n$;

г) часткових ін'єкцій $f \subset M_n \times M_m$;

д) повних ін'єкцій $f \subset M_n \times M_m$;

е) підстановок $f : M_n \longrightarrow M_n$;

є) бієкцій $f : M_n \xrightarrow{\text{на}} M_m$, де $M_k=\{1,2,...,k\}$, $k \in \mathbb{N}$?

293. * Нехай $f : A \longrightarrow B$ — повне відображення множини A в множину B. Розглянемо відображення $f_* : \mathfrak{P}(A) \longrightarrow \mathfrak{P}(B)$ і $f^* : \mathfrak{P}(B) \longrightarrow \mathfrak{P}(A)$ такі, що $f_*(X) \overset{df}{=} \breve{f}(X)$; $f^*(Y) \overset{df}{=} \breve{f}^{-1}(Y)$ де $X \subset A$, $Y \subset B$. Яким повинно бути відображення f, якщо виконується рівність: а) $f^* \circ f_* = \Delta_{\mathfrak{P}(A)}$; б) $f_* \circ f^* = \Delta_{\mathfrak{P}(B)}$?

294. Нехай $f : A \xrightarrow{\text{на}} B$ — сюр'єкція. На множині A задати еквівалентність $\varepsilon \subset A \times A$ таку, щоб між множинами A/ε і B існувала біекція.

295. * Дослідити множину всіх квазіоднозначних і функціональних відношень кожного виду зокрема відносно відомих операцій над відношеннями (див. аналогічну вправу 250).

296. Розглянути вправу 251 для того випадку, коли бінарними відношення є:

     а) квазіоднозначні;

     б) функціональні кожного виду зокрема.

297. На множині $\mathbb{N}$ натуральних чисел задані бінарні відношення:

     $\rho = \{(n; m) | m \vdots n\}$;

     $\sigma = \{(n; m) | n < m\}$;

     $\tau = \{(n; m) | n, m \text{ взаємно прості між собою}\}$;

     $\lambda_k = \{(n; m) | \, |m - n| = k \wedge k \in \mathbb{N}\}$.

     Знайти $\rho \circ \rho$, $\sigma \circ \rho$, $\sigma \circ \sigma$, $\tau \circ \tau$, $\lambda_k \circ \rho$, $\rho \circ \lambda_k$, $\lambda_k \circ \sigma$, $\sigma \circ \lambda_k$, $\lambda_l \circ \lambda_k$, де $k, l \in \mathbb{N}$.

5.9 Відповіді та вказівки до розв'язання деяких вправ

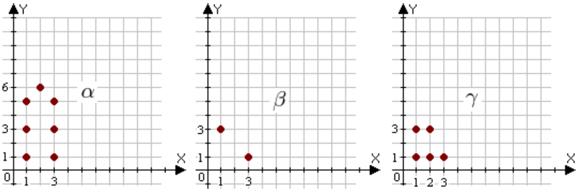
№ 235.

а) $\alpha = \{(1;3),(1;1),(1;5),(2;6),(3;1),(3;3),(3;5)\}$; $pr_1\alpha = \{1,2,3\} = A$; $pr_2\alpha = \{1,3,5,6\} = B$;

$\beta = \{(1;3),(3;1)\}$; $pr_1\beta = pr_2\beta = \{1,3\}$;

$\gamma = \{(1;1),(1;3),(2;1),(2;3),(3;1)\}$; $pr_1\gamma = \{1,2,3\} = A$; $pr_2\alpha = \{1,3\}$.

б)



Мал. 1.54.

в)

$$\alpha = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc}1&3&5&6\end{array}\\ \begin{array}{c}1\\2\\3\end{array} & \begin{pmatrix}1&1&1&0\\0&0&0&1\\1&1&1&0\end{pmatrix}\end{array}; \quad \beta = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc}1&3&5&6\end{array}\\ \begin{array}{c}1\\2\\3\end{array} & \begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}\end{array};$$

$$\gamma = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc}1&3&5&6\end{array}\\ \begin{array}{c}1\\2\\3\end{array} & \begin{pmatrix}1&1&0&0\\1&1&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}\end{array}.$$

Мал. 1.55.

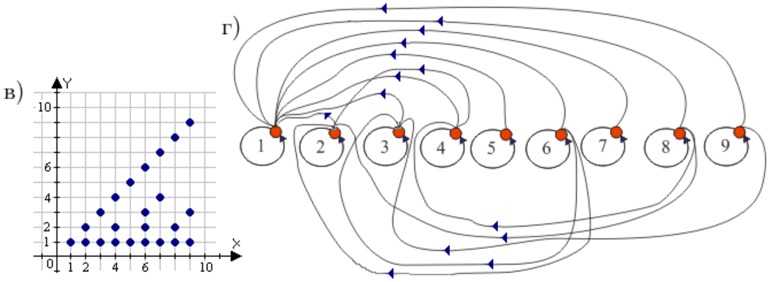
№ 236.

$$\rho = \{(1;1),(2;1),(3;1),(2;2),(3;3),(4;1),(4;2),(4;4),$$
$$(5;1),(5;5),(6;1),(6;2),(6;3),(6;6),$$
$$(7;1),(7;7),(8;1),(8;2),(8;4),(8;8),(9;1),(9;3),(9;9)\}.$$

б)

x_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\rho\langle x_i \rangle$	{1}	{1, 2}	{1, 3}	{1, 2, 4}	{1, 5}	{1, 2, 3, 6}	{1, 7}	{1, 2, 4, 8}	{1, 3, 9}

Мал. 1.56.



Мал. 1.57.

№ 237. а) $\rho_1 =$„$x \leqslant 0 \wedge y \leqslant 0$“; б) $\rho_2 =$„$xy \leqslant 0$“; в) $\rho_3 =$„$y < 0$“.

№ 238.

№ 239.

$\rho_2 \circ \rho_1 = \{(1;1),(4;1),(2;1),(2;2),(3;1),(1;2)\}$; $pr_1(\rho_2 \circ \rho_1) = \{1,2,3,4\}$; $pr_2(\rho_2 \circ \rho_1) = \{1,2\}$; $pr(\rho_2 \circ \rho_1) = \{1,2,3,4\}$;

$\rho_1 \circ \rho_2 = \{(4;2),(4;5),(3;2),(3;3),(2;2),(2;5),(5;2),(5;3)\}$; $pr_1(\rho_1 \circ \rho_2) = \{2,3,4,5\}$; $pr_2(\rho_1 \circ \rho_2) = \{2,3,5\}$; $pr(\rho_1 \circ \rho_2) = \{2,3,4,5\}$;

$\rho_1 \circ \rho_1 = \{(1;2),(1;3),(4;2),(4;3),(2;2),(2;3),(2;4),(3;2)\}$; $pr_1(\rho_1 \circ \rho_1) = \{1,2,3,4\}$; $pr_2(\rho_1 \circ \rho_1) = \{2,3,4\}$; $pr(\rho_1 \circ \rho_1) = \{1,2,3,4\}$;

$\rho_2 \circ \rho_1^{-1} = \{(2;1),(3;1),(4;2)\}$; $pr_1(\rho_2 \circ \rho_1^{-1}) = \{2,3,4\}$; $pr_2(\rho_2 \circ \rho_1^{-1}) = \{1,2\}$; $pr(\rho_2 \circ \rho_1^{-1}) = \{1,2,3,4\}$;

$\rho_1 \cup \rho_2 =$„$x \leqslant 0 \vee y \leqslant 0$“ $\rho_2 \cup \rho_3 = \rho_1 \cup \rho_2 =$„$x \leqslant 0 \vee y \leqslant 0$“

$\rho_1 \cap \rho_3 =$„$x \leqslant 0 \wedge y < 0$“ $\rho_1 \setminus \rho_2 =$„$x_1 < 0 \wedge y < 0$“

Мал. 1.58.

$\rho_2 \circ \rho_2^{-1} = \{(1;1),(2;2)\}$; $pr_1(\rho_2 \circ \rho_2^{-1}) = pr_2(\rho_2 \circ \rho_2^{-1}) = pr(\rho_2 \circ \circ \rho_2^{-1}) = \{1, 2\}$.

№ 240.

$(a;b) \in \rho_3 \circ \rho_3 \Leftrightarrow a$ — дід b; $(a;b) \in \rho_2 \circ \rho_2 \Leftrightarrow a$ — бабуся b;

$(a_1;a_2) \in \rho_1^{-1} \circ \rho_1 \Leftrightarrow a_1$ і a_2 — рідні брати;

$(a_1;a_2) \in \rho_3^{-1} \circ \rho_2 \Leftrightarrow$ жінка a_1 і чоловік a_2,
які мають спільних дітей і. т. д..

№ 241.

$\rho =$„$(x-2)^2 + (y-3)^2 = 5^2$“; $\rho\langle 5\rangle = \{7, -1\}$; $pr_1\rho = [-3;7]$; $pr_2\rho = [-2;8]$; $pr\rho = [-3;8]$.

№ 242.

$\rho^{-1} \circ \rho = M_9 \times M_9 =\{(a;b)|a$ і b мають спільний дільник на $M_9\}$;

$\rho \circ \rho^{-1} =\{(a;b)|a$ і b мають спільне кратне на $M_9\}$;

$\overline{\rho \circ \rho^{-1}} = (M_9 \times M_9) \setminus \rho \circ \rho^{-1} =$
$=\{(a;b)|a$ і b не мають спільньного кратного на $M_9\}$.

№ 243.

а) $pr_1\rho = pr_2\rho = \mathbb{Q}$; $\rho \circ \rho = \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$; $\rho \circ \rho^{-1} = \rho^{-1} \circ \rho = \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$;

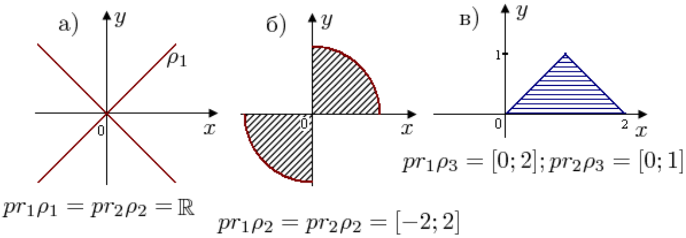
б) $pr_1\rho = pr_2\rho = Q$; $\rho \circ \rho = \{(x;y)|9x \leqslant 4y\}$; $\rho^{-1} \circ \rho = \rho \circ \rho^{-1} = = Q \times Q$.

№ 244.

2^{mn}. **Вказівка**. Врахувати, що $|A \times B| = mn$, де $|X|$ — число елементів множини X.

№ 246 (мал. 1.59).

№ 247. **Вказівка**. Використати означення проекцій та властивості зрізів відносно композиції та обертання бінарних відно-



$pr_1\rho_1 = pr_2\rho_2 = \mathbb{R}$

$pr_1\rho_2 = pr_2\rho_2 = [-2; 2]$

$pr_1\rho_3 = [0; 2]; pr_2\rho_3 = [0; 1]$

Мал. 1.59.

шень. Наприклад, для б) маємо: оскільки $\breve{\rho}(A) = pr_2\rho \subset B$, то $pr_2(\varphi \circ \rho) = \overbrace{\varphi \circ \rho}^{\smile}(A) = \breve{\varphi}(\breve{\rho}(A)) = \breve{\varphi}(pr_2\rho) \subset \varphi(B) = pr_2\varphi$; тому співвідношення $pr_2(\varphi \circ \rho) \subset pr_2\varphi$ виконується; для в) маємо: $pr_1(\varphi \circ \circ \rho) = \overbrace{(\varphi \circ \rho)^{-1}}^{\smile}(C) = \overbrace{(\rho^{-1} \circ \varphi^{-1})}^{\smile}(C) = \breve{\rho}^{-1}(\breve{\varphi}^{-1}(C)) = \breve{\rho}^{-1}(pr_1\varphi)$.

№ 248.

а) іррефлексивне, асиметричне інтранзитивне;
б) рефлексивне, антисиметричне, зв'язне, транзитивне;
в) рефлексивне, транзитивне;
г) рефлексивне, симетричне, транзитивне;
д) іррефлексивне, симетричне, повне;
е) рефлексивне, симетричне, транзитивне;
є) іррефлексивне;
ж) частково-рефлексивне, симетричне, транзитивне;
з) рефлексивне, симетричне;
и) симетричне;
і) іррефлексивне, транзитивне, асиметричне, зв'язне;
ї) симетричне, повне;
й) рефлексивне, симетричне, транзитивне.

№ 249. **Вказівка**. Для розв'язання даної вправи необхідно володіти елементами комбінаторики, оскільки завдання вправи зводяться як правило до підрахунку числа підмножин з певними властивостями заданої множини. Наведемо відповіді до деяких завдань цієї вправи: а) $(2^n - 1)^2 + 1$; б) 2^n; в) 2^n; г) $(2^n - 1)^n$; д) $(2^n - 1)^n$; е) $(2^n - 1)^n - (2^{n-1} - 1)^n - \frac{2^{n^2-1}-1}{2^n-1}$; є) $2^{\frac{n^2+n}{2}}$; ж)

$3^{\frac{n^2-n}{2}}$; з) $3^{\frac{n^2-n}{2}} \cdot 2^n$; і) $\sum_{k=0}^{n-k}(C_n^k \cdot 3^{\frac{(n-k)^2-(n-k)}{2}} \cdot 2^{n-k})$; и) $3^{\frac{n^2-n}{2}} \cdot 2^n$; й) $\sum_{k=1}^{n}(C_n^k \cdot 2^{k^2-k})$; ї) 2^{n^2-n}; к) 2^{n^2-n}; л) $1 + \sum_{i=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]}(C_n^{n-2i} \cdot (2i - 1)!!) = 1 + \sum_{i=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \left(C_n^{n-2i} \cdot \frac{(2i-1)!}{2^i \cdot i!}\right)$; м) $2^{\frac{n^2-n}{2}}$; н) $\sum_{k=0}^{n} \left(C_n^k \cdot 2^{\frac{k^2-k}{2}}\right)$; о) $(n+1)^n$; п) $(n+1)^n$; р) n^n; с) $\sum_{i=0}^{n}((C_n^i)^2 \cdot i!)$; т) $n!$.

№ 251. **Вказівка**. Дамо відповідь лише до деяких завдань вправи. Нехай $\rho \subset A \times A$ — довільне бінарне відношення між елементами множини A. Тоді маємо:

а) $pr_1\rho \times pr_2\rho$ — найменше прямокутне бінарне відношення, що містить ρ, а найбільшого, що міститься в ρ, не існує;

б) $pr\rho \times pr\rho$ — найменше квадратне бінарне відношення, що містить ρ, а найбільшого, що міститься в ρ не існує;

є) $\rho \cup \rho^{-1}$ — найменше симетричне бінарне відношення, що містить ρ, а $\rho \cap \rho^{-1}$ — найбільше, що міститься в ρ;

ї) $\rho \cup \Delta_A$ — найменше рефлексивне бінарне відношення, що містить ρ, а найбільшого, що міститься в ρ, не існує.

№ 253.

а) толерантними є: г), е), з), й);

б) частково толерантними є: г), е), ж), з), й);

е) еквівалентними є: г), е), й);

г) частково-еквівалентними є: г), е), ж), й);

фактор множина для:

г) $\{4Z, 4Z+1, 4Z+2, 4Z+3\}$;

е) множина підмножин прямих, паралельних між собою;

ж) множина гуртожитків, у яких проживають студенти інституту;

й) множина многокутників з рівними площами.

№ 254.

ε рефлексивне, оскільки $m + n = n + m$;

ε симетричне, оскільки з рівності $m + l = n + k$ слідує рівність $k + n = l + m$;

ε транзитивне, оскільки з рівностей $m + l = n + k$, $k + q = l + p$ слідує рівність $m + q = n + p$;

кожен ε-клас, який містить пару $(m; n)$, складається з пар виду $(m + t; n + t)$, де $t \in \mathbb{N}$ — це всі пари, різниця компонент у яких стала і рівна $n - m$.

№ 255. 2 відкриті півплощини і пряма, що їх розділяє.

№ 256. Отримуються 5 класів, що не перетинаються між собою: $\{2,7,12,17\}$; $\{3,8,13,18\}$; $\{4,9,14,19\}$; $\{5,10,15,20\}$; $\{1,6,11,16\}$.

№ 257.

а) на множині $\mathbb{N}$ натуральних чисел: $\leqslant$, $\vdots$;

б) на множині всіх жінок: „бути сестрою“;

в) на множині студентів групи „дружити“;

г) на множині $\mathbb{Z}$ цілих чисел: $\vdots$ — подільність.

№ 258. Досить довести рефлексивність вказаного відношення, яка очевидним чином випливає з умови завдання.

№ 259.

а) еквівалентність на множині людей;

б) часткова еквівалентність на множині всіх людей;

в) еквівалентність на множині студентів університету;

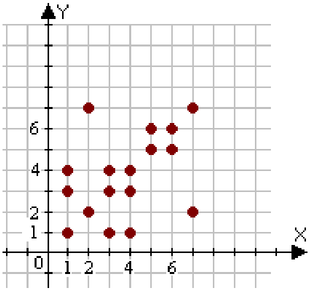
г) еквівалентність на множині трикутників площини;

д) строгий лінійний порядок на множині $\mathbb{N}$ натуральних чисел;

е) квазіпорядок на множині людей.

№ 260. Графік відповідної еквівалентності показано на малюнку 1.60.

Розбиттям множини M_7 є множина $\{\{2,7\},\{1,3,4\},\{5,6\}\}$, оскільки всі три підмножини непорожні, не перетинаються між собою, а їх об'єднанням є множина M_7: $\{2,7\}\cup\{1,3,4\}\cup\{5,6\} = M_7$.



Мал. 1.60.

№ 261.

а) рефлексивне, симетричне, транзитивне;

б) рефлексивне, повне, обернено повне;

в) рефлексивне, симетричне, транзитивне;

г) рефлексивне, антисиметричне, транзитивне, досконале;

д) симетричне, неповне;

е) повне, обернено повне;

є) симетричне, повне;

ж) іррефлексивне, асиметричне, транзитивне, досконале;

з) іррефлексивне, симетричне, повне, досконале;

и) рефлексивне, транзитивне.

№ 262. а) так; б) ні; в)ні; г) так.

№ 263.

а) Нехай $\varepsilon_1 \subset \varepsilon_2$; використавши означення еквівалентності та властивості бінарних відношень, маємо:

оскільки $\Delta_M \subset \varepsilon_1$ то $\varepsilon_2 = \varepsilon_2 \circ \Delta_M \subset \varepsilon_2 \circ \varepsilon_1$;

оскільки $\varepsilon_1 \subset \varepsilon_2$, то $\varepsilon_2 \circ \varepsilon_1 \subset \varepsilon_2 \circ \varepsilon_2 \subset \varepsilon_2$, звідки маємо рівність $\varepsilon_2 \circ \varepsilon_1 = \varepsilon_2$;

якщо ж виконується рівність $\varepsilon_2 \circ \varepsilon_1 = \varepsilon_2$, то в силу включення $\Delta_M \subset \varepsilon_2$ маємо $\varepsilon_1 = \Delta_M \circ \varepsilon_1 \subset \varepsilon_2 \circ \varepsilon_1 \subset \varepsilon_2$, тобто $\varepsilon_1 \subset \varepsilon_2$.

в) **Вказівка**. Показати, що виконується рівність $\varepsilon_2\langle a\rangle = \bigcup_{a\equiv x(\varepsilon_2)} \varepsilon_1\langle x\rangle$, де $a, x \in M$ тоді і тільки тоді, коли $\varepsilon_1 \circ \varepsilon_2 = \varepsilon_2$.

№ 264. Використавши властивості бінарних відношень, маємо:

а) $(\rho^{-1} \circ \rho)^{-1} = \rho^{-1} \circ (\rho^{-1})^{-1} = \rho^{-1} \circ \rho$, причому $pr_1(\rho^{-1} \circ \rho) = pr_2(\rho^{-1} \circ \rho) = pr_1\rho, \quad a \in pr_1\rho \Rightarrow (\exists b \in Y)(a; b) \in \rho \Rightarrow (a; a) \in \rho^{-1} \circ \rho$, що вказує на те, що $\Delta_{pr(\rho^{-1}\circ\rho)} \subset \rho^{-1} \circ \rho$; тому $\rho^{-1} \circ \rho$ — часткова толерантність; аналогічно доводиться, що і $\rho \circ \rho^{-1}$ — часткова толерантність;

б) $(x_1; x_2) \in \rho^{-1} \circ \rho \Leftrightarrow (\exists y \in Y)((x_1; y) \in \rho \wedge (x_2; y) \in \rho) \Leftrightarrow (x_1; x_2) \in \bigcup_{y\in Y}(\rho^{-1}\langle y\rangle \times \rho^{-1}\langle y\rangle)$, що вказує на рівність $\rho^{-1} \circ \rho = \bigcup_{y\in Y}(\rho^{-1}\langle y\rangle \times \rho^{-1}\langle y\rangle)$; аналогічно доводиться рівність $\rho \times \rho^{-1} = \bigcup_{x\in X}(\rho\langle x\rangle) \times \rho\langle x\rangle$.

№ 266.

а) $t_\rho = \rho \cup \rho^{-1} \cup \Delta_M$ — найменше толерантне відношення, яке містить відношення $\rho \subset M \times M$, а найбільшого, що міститься в ρ, не існує;

в) $\varepsilon_\rho = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}(\rho \cup \rho^{-1})^n \cup \Delta_M$ — найменша еквівалентність, яке містить відношення $\rho \subset M \times M$, а найбільшої, що міститься в ρ, не існує.

№ 267.

а) $2^{\frac{n^2-n}{2}}$;

б) $\sum_{k=0}^{n}\left(C_n^k \cdot 2^{\frac{k^2-k}{2}}\right)$;

в) $\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{l=0}^{k-1}\frac{(-1)^l C_k^l (k-l)^n}{k!}\right)$;

г) $\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{i}\left(\sum_{l=0}^{k-1}\frac{(-1)^l C_k^l (k-l)^i}{k!}\right)$.

№ 268. **Вказівка**. Для доведення відповідних тверджень вправи необхідно використати властивості бінарних відношень та відповідні означення. Наприклад, для а) маємо: в силу означень еквівалентності та часткової еквівалентності очевидно, що часткова еквівалентність ε_ρ є еквівалентністю на множині X тоді і тільки тоді, коли $pr_1\rho = X$.

№ 269. Для многочлена першого степеня всі класи еквівалентності мають точно по одному елементу, а для многочлена k-го степеня — можуть мати від одного до k елементів.

№ 270.

У вправі 248: б) лінійний нестрогий порядок; і) лінійний строгий порядок.

У вправі 261: г) лінійний нестрогий порядок; ж) лінійний строгий порядок.

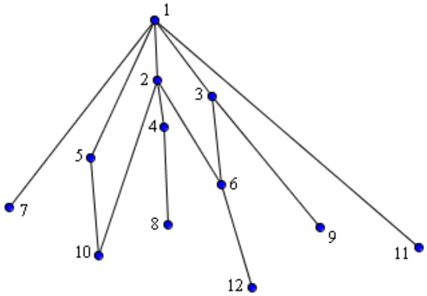
№ 271. Оскільки відношення подільності $\vdots$ на множині $\mathbb{N}$ натуральних чисел є нестрогим лінійним порядком, то очевидно, що і обмеження цього відношення на множині $M_{12} \subset \mathbb{N}$ теж є нестрогим нелінійним порядком. Серед особливих елементів впорядкованої множини $\left(M_{12};\vdots\right)$ є такі: 1 — найбільший і максимальний елемент, який є точною верхньою гранню; 7, 10, 8, 12, 9, 11 — мінімальні елементи; 83160 — точна нижня грань; $83160 \cdot n$, де $n \in \mathbb{N}$ — міноранти M_{12}. Відповідна діаграма Хассе має вигляд, як на малюнку 1.61.

№ 272. **Вказівка**. Застосувати метод від супротивного.

№ 273. $\varnothing$ — найменший елемент; всі підмножини, які містять n чисел, максимальні; N — точна верхня грань.

№ 274. **Вказівка**. Для доведення слід використати відповідні означення. Наприклад, для впорядкованої множини $(\mathbb{N})\,;\vdots$ маємо: $inf(m,n) = \text{НСК}(m,n)$; $sup(m,n) = \text{НСД}(m,n)$.

№ 275. а) $n!$.



Мал. 1.61.

№ 276. **Вказівка**. Довести, що $inf((\varepsilon_i)_{i\in I}) = \bigcap_{i\in I}\varepsilon_i$, $sup((\varepsilon_i)_{i\in I}) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}(\bigcup_{i\in I}\varepsilon_i)^n$, де $(\varepsilon_i)_{i\in I}$ — довільна сім'я еквівалентностей на множині M, що вказуватиме на те, що $(\varepsilon(M);\subset)$ — повна решітка.

№ 277.

а) ρ_1 можна доповнити до нестрогого як лінійного, так і нелінійного порядків;

б) ρ_2 можна доповнити як до строгого, так і нестрогого нелінійного та лінійного порядку;

в) ρ_3 не можна доповнити ні до якого з відношень порядку, оскільки $(3;4),(4;3)\in\rho_3$.

№ 278.

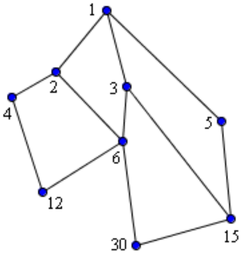
Відповідна діаграма Хассе зображена на малюнку 1.62. Особливі елементи такі: 1 — найбільший, максимальний елемент, який є точною верхньою гранню M; $inf(M) = 60$ — точна нижня грань M; $60n$, де $n\in\mathbb{N}$ — мінoранти M; 12, 15, 30 — мінімальні елементи.

№ 279.

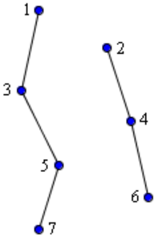
Відповідна діаграма Хассе зображена на малюнку 1.63. Очевидно, що: $\omega = \{(1;1),(2;2),...$
$...,(7;7),(3;1),(5;1),(7;1),(4;2),(6;2),(5;3),(7;3),(6;4),(7;5)\}$; 1, 2 — максимальні елементи M_7; 7, 6 — мінімальні елементи M_7.

№ 280.

Всі одноелементні підмножини є мінімальними; $inf(F) = \varnothing; sup(F) = N$.



Мал. 1.62.



Мал. 1.63.

№ 281. **Вказівка**. Використати означення нестрогого порядку.

№ 282. C^n_{n+m-1}. Для доведення того, що ізотонність f рівносильна включенню $f \circ \omega \circ f^{-1} \subset \omega$, слід використати відповідні означення.

№ 283. **Вказівка**. Розв'зування вправи звести до розв'язування попередньої вправи 282.

№ 284.

У вправі 248 квазіпорядками є: б), в), г), е), й), а домінуванням є і);

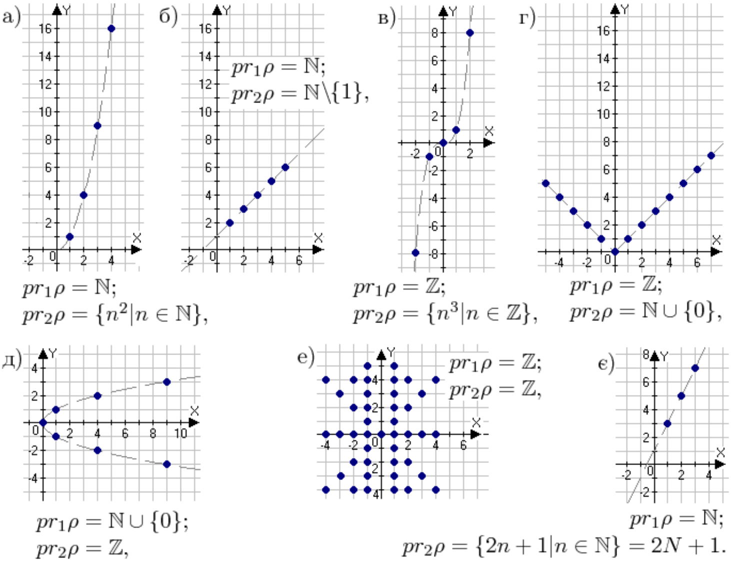
у вправі 261 квазіпорядками є: а), в), г), и), а домінуванням є ж).

№ 286. б) $2^{\frac{n^2-n}{2}}$; в) лінійних порядків $n!$

№ 287. а) $\Delta_M \cup_{n\in\mathbb{N}} \rho^n$ — найменший квазіпорядок, що містить відношення $\rho \subset M \times M$, а найбільшого, яке міститься в ρ, не існує.

№ 288. **Вказівка**. Застосувати відповідні означення та властивості операцій над бінарними відношеннями.

№ 289. Малюнок 1.64:



а) $pr_1\rho = \mathbb{N}$; $pr_2\rho = \{n^2 | n \in \mathbb{N}\}$,

б) $pr_1\rho = \mathbb{N}$; $pr_2\rho = \mathbb{N}\backslash\{1\}$,

в) $pr_1\rho = \mathbb{Z}$; $pr_2\rho = \{n^3 | n \in \mathbb{Z}\}$,

г) $pr_1\rho = \mathbb{Z}$; $pr_2\rho = \mathbb{N} \cup \{0\}$,

д) $pr_1\rho = \mathbb{N} \cup \{0\}$; $pr_2\rho = \mathbb{Z}$,

е) $pr_1\rho = \mathbb{Z}$; $pr_2\rho = \mathbb{Z}$,

є) $pr_1\rho = \mathbb{N}$; $pr_2\rho = \{2n+1 | n \in \mathbb{N}\} = 2N + 1$.

Мал. 1.64.

а), б), в), є) — взаємно однозначні повні функції;

г) — повна не взаємно однозначна функція;

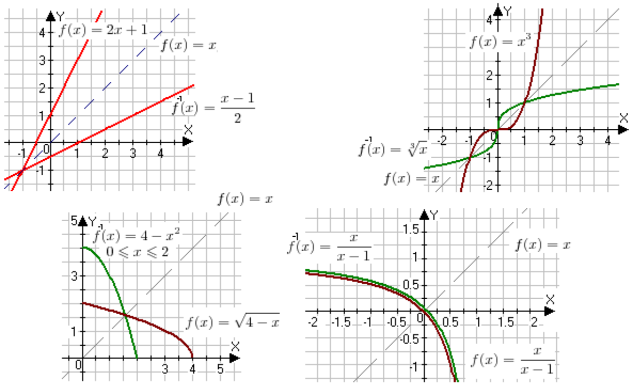
д), е) — відношення не є функціями.

№ 290. Малюнок 1.65:

а) малюнок 1.65 а), $D(f) = E(f) = D(f^{-1}) = E(f^{-1}) = \mathbb{R}$; $f(x) = 2x + 1; f^{-1}(x) = \frac{x-1}{2}$; очевидно, що $x_1 \neq x_2 \Leftrightarrow 2x_1 + 1 \neq 2x_2 + 1$, чим і доводиться оборотність функції;

б) малюнок 1.65 б), $D(f) = E(f) = D(f^{-1}) = E(f^{-1}) = \mathbb{R}$; $f(x) = x^3; f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$; $x_1 \neq x_2 \Leftrightarrow x_1^3 \neq x_2^3$;

в) малюнок 1.65 в), $D(f) = E(f^{-1}) = [0; 4]; D(f^{-1}) = E(f) = [0; 2]$; $f(x) = \sqrt{4-x}$; $\begin{cases} f^{-1}(x) = 4 - x^2; \\ 0 \leqslant x \leqslant 2, \end{cases}$ $x_1 \neq x_2 \Leftrightarrow \sqrt{4-x_1} \neq \sqrt{4-x_2}$;



Мал. 1.65.

г) малюнок 1.65 г), $D(f) = E(f^{-1}) = [-2; 1]; D(f^{-1}) = E(f) = [-\infty; \frac{2}{3}]$; $\begin{cases} f(x) = \frac{x}{x-1}; \\ -2 \leqslant x < 1, \end{cases}$ $\begin{cases} f^{-1}(x) = \frac{x}{x-1}; \\ x \leqslant \frac{2}{3}, \end{cases}$ $x_1 \neq x_2 \Leftrightarrow \frac{x_1}{x_1-1} \neq \frac{x_2}{x_2-1}$; графіки співпадають на відрізку $[-2; \frac{2}{3}]$.

№ 291. **Вказівка**. Відповідь до вправи можна вказати багатьма способами. Один із варіантів відповіді такий: а) $y = ln(-x)$; б) $y = 2x$; в) $y = \frac{1}{3}x$; г) $y = 2^x$; д) $y = 11x - 18$; е) $y = -x$; є) $y = 3x + 5$; ж) $y = tg(\frac{\pi}{4}x)$.

№ 292.

а) $(m+1)^n$;

б) m^n;

в) $n!$;

г) $\sum\limits_{k=1}^{min(m,n)} (C_n^k \cdot k! C_m^k)$.

д) $n!C_m^n$, якщо $n \leqslant m$ (в противному випадку не існує);

е) $n!$;

є) $n!$, якщо $n = m$ (в противному випадку не існує).

№ 294.

$\varepsilon = \{(a_1; a_2) | f(a_1) = f(a_2)\}$.

№ 297. $\rho \circ \rho = \rho$; $\sigma \circ \rho = \sigma$; $\sigma \circ \sigma = \sigma \setminus \{(n; n+1) | n \in \mathbb{N}\}$;

$\tau \circ \tau = \mathbb{N} \circ \mathbb{N}$; $\lambda_k \circ \rho = \{(m;n)|(n \pm k)\vdots m\}$; $\rho \circ \lambda_k = \{(m;n)|n\vdots(m \pm k)\}$; $\lambda_k \circ \sigma = \{(m;n)|m < n \pm k \wedge m, n \in \mathbb{N}\}$; $\sigma \circ \lambda_k = \{(m;n)|m \pm k < n\}$; $\lambda_l \circ \lambda_k = \lambda_{k+l} \cup \lambda_{|l-k|} = \lambda_k \circ \lambda_l$.

Орієнтовні завдання контрольної роботи № 1

1. З'ясувати, чи формула $\Psi = x \vee y$ є логічним наслідком формули $\Phi = (y \vee z)x$.

2. Спростити формули:
   а) $\Phi = (y \vee \overline{x}) \to y \wedge x$;
   б) $\Phi = xyz \vee xy \vee x$;
   в) $\Phi = (\overline{x} \vee \overline{y} \vee \overline{z})(\overline{x} \vee yz)$;
   г) $\Phi = (y \vee \overline{x}) \to yx$;
   д) $\Phi = (bc \to a)(c \to a)$;
   е) $\Phi = (y \to x) \vee (z \to x)$.

3. Довести рівносильності:
   а) $a(\overline{a} \vee b) \vee b \equiv b$;
   б) $ab \to c \equiv b \to (a \to c)$;
   в) $(x \vee y \vee \overline{z})(x \vee y \vee z) \equiv x \vee y$; г) $xyz \vee x\overline{y}z \equiv x(y \leftrightarrow z)$.

4. З'ясувати, чи формула Ψ є логічним наслідком формули Φ, якщо:
   а) $\Phi = (y \vee z)x$; $\Psi = x \vee y$;
   б) $\Phi = \overline{y} \to z$; $\Psi = \overline{y} \to x \vee z$;
   в) $\Phi = x \vee \overline{y} \vee z$; $\Psi = x \vee z\overline{y}$;
   г) $\Phi = x \vee z \to y$; $\Psi = z \to y$.

5. Перевірити рівносильність та записати двоїсті но них:
   а) $xy \vee \overline{x}\,\overline{y} \vee \overline{x}y \equiv \overline{x} \vee y$;
   б) $ab \vee \overline{a}c \vee \overline{a}\,\overline{b}c \vee a\overline{b} \equiv a \vee c$.

6. Перевірити рівності та записати двоїсті но них:
   а) $((X^{'} \cap Y^{'}) \cap (X^{'} \cup Y^{'}))^{'} = X \cup Y$;
   б) $(X \cap Y \cap Z) \cup (X^{'} \cap Y \cap Z) \cup Y^{'} \cup Z^{'} = U$.

7. Довести рівність $X \cup (X \cup X')' = X \cup Y$ та проілюструвати на діаграмах Венна-Ейлера.

8. Перевірити рівності та проілюструвати їх на діаграмі Венна-Ейлера:
   а) $A \cup (A \cup B')' = A$;
   б) $X \setminus (X \setminus Y) = X \cap Y$;
   в) $(A \cap B') \cup (B \cap A) = A$;
   г) $X(Y - Z) = XY - XZ$.

9. Спростити теоретико-множинний вираз $\overline{A}(B \cup C) \cup \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$ та проілюструвати на діаграмі Венна-Ейлера.

10. За допомогою логічної символіки записати висловлення та їх заперечення і встановити їх істинносні значення
    а) „Не існує найбільшого цілого від'ємного числа“;
    б) „Існує таке раціональне число x, що виконується рівність $x^2 - 2 = 0$“;
    в) „Не існує найбільшого натурального числа“;
    г) „Для кожного натурального числа знайдеться менше за нього натуральне число“.

11. Записати символічно висловлення „Довільне натуральне число, яке більше одиниці, ділиться на просте число“.

12. Записати на елементарній мові та на мові бінарних відношень твердження „Бінарне відношення α між елементами множини M антисиметричне“.

13. На координатній площині $0xy$ зобразити області визначення та істинності таких предикатів з дійсними змінними x, y:
    а) $x^2 + y^2 = 4 \rightarrow xy \leqslant 0$;
    б) $\sqrt{xy} \ < 1 \wedge x^2 + y^2 \geqslant 4$;
    в) $2x + 2y > 6 \rightarrow xy > 0$;
    г) $x - y \leqslant 2 \leftrightarrow xy \leqslant 0$.

14. На множині M_5 задано бінарне відношення $\alpha = \{(5;1),(5;2),(5;3),(2;3)\}$, виконати наступні завдання:
    а) знайти його проекції $pr_1\alpha, pr_2\alpha, pr\alpha$;
    б) встановити, якого виду порядок воно задає на множині M_5, вказати особливі елементи на $pr\alpha$ та намалювати відповідну діаграму Хассе;
    в) з'ясувати, чи це відношення α, а чи його обертання є функціональним.
    г) Дослідити, чи будуть еквівалентностями або частковим еквівалентностями добутки $\alpha^{-1} \circ \alpha$, $\alpha \circ \alpha^{-1}$;

15. Показати, що $M = \{\{1,2\},\{3,4\},\{5\}\}$ є розбиттям множини M_5, задати відповідну еквівалентність та побудувати її графік.

16. Намалювати діаграму Хассе для впорядкованої множини $\left(M_{12} \setminus M_2; \vdots\right)$ та вказати їх особливі елементи.

17. Довести, що задані відношення є оборотними функціями, намалювати графіки цих функцій та обернених за них і вказати їх області задання та значень:
    а) $f = \{(x;y)|y = \sqrt{x-2} \wedge x \leqslant 11\}$;
    б) $f = \{(x;y)|y = \frac{x-1}{x} \wedge 0 \leqslant x \leqslant 4\}$;
    в) $f = \{(x;y)|y = 2x - x^2| \wedge 2 \leqslant x \leqslant 4\}$.

Список використаних джерел

1. *Биркгоф Г.* Теория решоток. — Москва: Наука, 1984. — 568 с.

2. *Бродский Я. С., Слипенко А. К.* Функциональные уравнения. — Киев: Вища школа, 1983. — 96 с.

3. *Бурбаки Н.* Теория множеств. — Москва: Мир, 1965. — 456 с.

4. *Ван дер Варден Б. Л.* Алгебра. — Москва: Наука, 1979. — 624 с.

5. *Гнеденко Б. В.* Куср теории вероятностей. — Москва: Наука, 1988. — 456 с.

6. *Гохман А. В., и др.* Сборник задач по математической логике и алгебре множеств. — Саратов: СГУ, 1969. — 90 с.

7. *Гретцер Г.* Общая теория решоток. — Москва: Мир, 1982. — 456 с.

8. *Жлуктенко В. І., Наконечний С. І.* Теорія ймовірностей і математична статистика. — Київ: КНЕУ, 2001. — Т. 1. — 336 с.

9. *Завало С. Т.* Арифметика, алгебра і елементи аналізу. — Київ: Рад. шк., 1969. — 504 с.

10. *Завало С. Т., Костарчук В. М., Хацет Б. І.* Алгебра і теорія чисел. — Київ: Вища школа, 1974. — Т. 1. — 446 с.

11. *Завало С. Т., Левіщенко С. С., Рокіцький І. О.* Алгебра і теорія чисел. Практикум. — Київ: Вища школа, 1983. — Т. 1. — 232 с.

12. Збірник задач з алгебри. Ч. 1 / Під ред. І. О. Рокіцького. — Вінниця: ВДПУ, 2002. — 176 с.

13. *Игошин В. И.* Задачник-практикум по математической логике. — Москва: Просвещение, 1986. — 158 с.

14. *Игошин В. И.* Математическая логика и теория алгоритмов. — Саратов: СГУ, 1991. — 256 с.

15. *Калужнин Л. А.* Что такое математическая логика. — Москва: Наука, 1964. — 152 с.

16. *Кострыкин А. И.* Сборник задач по алгебре. — Москва: Факториал, 1995. — 454 с.

17. *Кулик В. Т., Рокіцький І. О.* Алгебра. — Вінниця: Глобус — Прес, 2005. — 264 с.

18. *Куликов Л. Я.* Алгебра и теория чисел. — Москва: Высшая школа, 1979. — 560 с.

19. *Курош А. Г.* Лекции по общей алгебре. — Москва: ФМ, 1962. — 396 с.

20. *Курош А. Г.* Курс высшей алгебры. — Москва: Наука, 1968. — 432 с.

21. *Ляпин Е. С.* Упражнения по теории груп. — Москва: Наука, 1967. — 264 с.

22. *Ляпин Е. С., Евсеев А. Е.* Алгебра и теория чисел. — Москва: Просвещение, 1974. — 384 с.

23. *Мальцев А. И.* Алгебраические системы. — Москва: Наука, 1970. — 382 с.

24. *Мерзляк А. Г., Полонський В. Б., Якір М. С.* Алгебра 9. — Харків: Гімназія, 2009. — 384 с. — Підручник для 9 класів з поглибленим вивченням математики.

25. *Никольская И. Л.* Математическая логика. — Москва: Высшая школа, 1981. — 128 с.

26. *Пензов Ю. Е.* Элементы математической логики. — Саратов: СГУ, 1968. — 144 с.

27. *Пугачев В. С.* Теория вероятностей и математическая статистика. — Москва: Наука, 1979. — 496 с.

28. *Столяр А. А.* Элементарное введение в математическую логику. — Москва: Просвещение, 1965. — 164 с.

29. Теория полугруп и ее приложения / Под ред. В. В. Вагнера. — Саратов: СГУ, 1965. — 352 с.

30. *Фаддеев Д. К., Соминский И. С.* Сборник задач по высшей алгебре. — Москва: Наука, 1977. — 228 с.

31. *Шкіль М. І., Слєпкань З. І., Дубинчук О. С.* Алгебра і початки аналізу: Підручник для 10 — 11 кл. — Київ: Зодіак — ЕКО, 2000. — 608 с.

Покажчик

Формат 60 × 84/16. Умовн. друк 20,62 арк.
Друк різографний. Тираж 300 примірників
Папір офсетний. Зам. № 2077

Друк ТОВ фірма „Планер“
м. Вінниця, вул. Визволення, 2
тел. (0432)52-08-64, 52-08-65
www.planer.com.ua, sale@planer.com.ua