Вінницький державний педагогічний університет
імені Михайла Коцюбинського

Калашніков І.В., Синюк Н.Л.

ПОБУДОВА ПЕРЕРІЗІВ ПРОСТОРОВИХ ТІЛ У ШКІЛЬНОМУ КУРСІ МАТЕМАТИКИ

Вінниця 2012

УДК 514.113(07):378.14

Рецензенти:
В.І. Клочко — доктор педагогічних наук, професор.
О.Б. Панасенко — кандидат фізико-математичних наук, старший викладач.

Навчальний посібник орієнтований на учнів старших класів загальноосвітніх шкіл, студентів фізико-математичних спеціальностей, учителів математики.

Рекомендовано до друку Вченою радою інституту математики фізики і технологічної освіти — протокол №6 від 11 січня 2012 р.

Автори:
Калашніков Ігор В'ячеславович
Синюк Наталя Леонідівна

Зміст

Вступ

Значення рисунка при вивченні геометрії дуже велике. Побудова правильних стереометричних рисунків при вивченні геометрії сприяє розвитку просторової уяви і полегшує сприйняття стереометричних об'єктів при теоретичних дослідженнях і розв'язуванні конкретних задач.

Цілком очевидно, що правильний рисунок не тільки фіксує окреме положення геометричних об'єктів, але й вказує на шлях розв'язування задачі.

У посібнику розглядається методика побудови перерізів многогранників. Матеріал згрупований в залежності від розташування точок на поверхні многогранника чи за її межами. Кожна із задач розв'язана двома методами. Для призматичних тіл — методом слідів і методом паралельного проектування, для пірамідальних тіл — методом слідів і методом центрального проектування. Окремі задачі розв'язані з детальним поясненням всіх кроків виконання побудови перерізу, інші містять скорочені пояснення.

Посібник буде корисним учням старших класів загальноосвітніх шкіл, студентам фізико-математичних спеціальностей, учителям математики.

Перелік умовних позначень

$\bullet$ — зображення точок на ребрах многогранника;

$\circ$ — зображення точок на гранях многогранника;

$\times$ — зображення ключових точок;

$\in$ — належність точки прямій або площині;

$\cap$ — перетин прямих, площин, прямої з площиною;

$=$ — результат операції, виконаної над геометричними фігурами;

$\leftrightarrow$ — означає сполучення відрізком прямої двох різних точок або проведення прямої через дві різні точки;

$A_1 = \text{пр}_\alpha A$ — означає, що точка A_1 є проекцією точки A на площину α;

(AB) — пряма, яка проходить через точки A і B;

$[AB)$ — промінь, який виходить з точки A і проходить через точку B;

$[AB]$ — відрізок прямої, обмежений точками A і B;

(ABC) — площина, яка задана точками A, B, C.

Значення математичної символіки в задачах на побудову

Історія математики показує, що логічна структура і ріст кожної математичної теорії, починаючи з визначеного етапу її розвитку, значною мірою залежить від використання математичної символіки та її удосконалення.

Чим же пояснюється значення символіки в математиці?

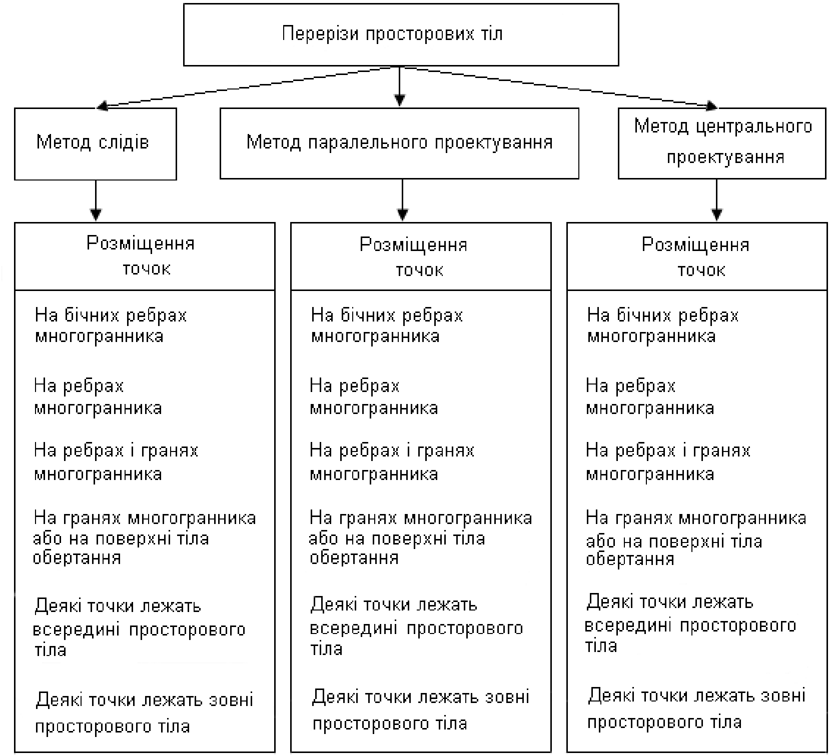
Математичні знаки служать в першу чергу для точного запису математичних понять. Їх сукупність — в реальних умовах їх використання математиками — утворює те, що називається математичною мовою. Використання знаків дозволяє формулювати закони математики в загальному вигляді. Математичні символи дозволяють записувати в компактній формі висловлювання, які б звичайною мовою були громіздкими. Це допомагає більш глибокому усвідомленню їх змісту, полегшує запам'ятовування.

Символи і системи символів відіграють в математиці роль розмовної мови. Подібно до звичайної мови, мова математичних символів дозволяє обмінюватись встановленими математичними істинами, налагоджувати контакт вчених у спільній науковій роботі.

Вирішальним є те, що мова математичних символів без звичайної мови існувати не може. Звичайна мова змістовніша мови математичних символів, вона необхідна для побудови і розвитку мови математичних символів. Мова математичних знаків лише допоміжний засіб, що приєднується до звичайної мови і використовується в математиці і галузях, де застосовуються її методи.

Необхідність використання мови символів в математиці зумовлена тим, що з її допомогою можна не тільки коротко і ясно записувати поняття і висловлювання математичних теорій, але і створювати алгоритми, які вирізняються своєю простотою і легкістю сприйняття. Цей факт є одним з найголовніших для розробки алгоритмів побудови перерізів.

Класифікація задач на побудову перерізів



Мал. 1. Класифікація задач на побудову перерізів та методи їх розв'язування

Метод слідів

Слідом січної площини називають пряму перетину січної площини з площиною, в якій знаходиться основа тіла, яке перерізають. Суть методу: будується пряма (слід) перетину січної площини з площиною основи, наприклад, піраміди або призми. Знаходять точки перетину прямої слідів з площинами бічних граней і діагональних перерізів цих многогранників. Ці точки разом з даними точками січної площини визначають прямі, яким належать сторони шуканого перерізу.

Метод слідів хоч і є універсальним методом побудови перерізів многогранників, проте в певних випадках є незручним. Ця незручність стосується випадків, коли точки, які задають переріз, лежать у площині, яка майже паралельна площині основи. У цих випадках використовуються інші методи.

Метод паралельного проектування

Паралельне проектування зручно використовувати при побудові перерізів призматичних тіл. При цьому, як правило, в якості площини проектування вибирають площину основи призми, а за напрям проектування приймають напрям бічного ребра призми.

Суть цього методу: потрібно визначити площину проектування і напрям проектування, знайти паралельні проекції даних точок шуканого перерізу на площину проектування, знайти точки перетину січної площини з ребрами многогранника і побудувати шуканий переріз.

Метод центрального проектування

При побудові перерізів пірамідальних тіл зручно користуватися центральним проектуванням. За площину проектування приймаємо площину основи, а в якості центра проектування беруть вершину піраміди.

Суть цього методу: треба визначити центр проектування, напрям проектування і площину проекцій, знайти центральні проекції даних точок шуканого перерізу на площину основи многогранника, який перерізаємо. Далі потрібно знайти точки перетину січної площини з ребрами многогранника і побудувати шуканий переріз.

Розділ 1

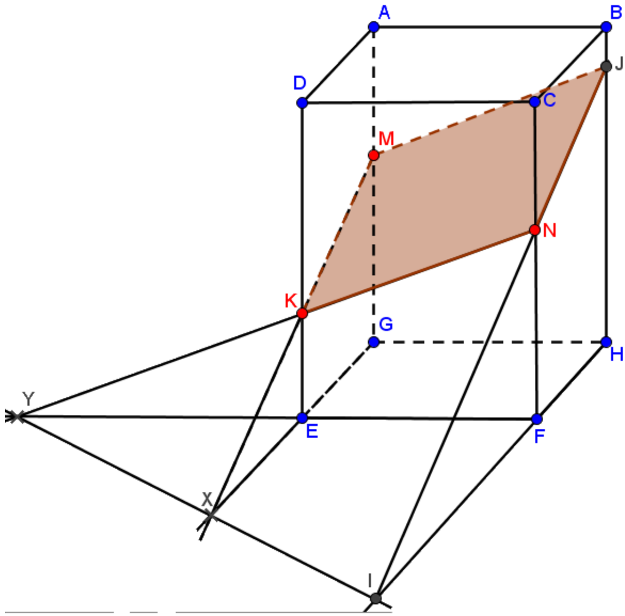
Зразки розв'язань задач на побудову перерізів просторових тіл

1.1 Переріз задано трьома точками на бічних ребрах многогранника

Задача 1.1. *Побудувати переріз чотирикутної призми площиною, що проходить через точки* $M \in [AG]$, $N \in [CF]$, $K \in [DE]$.

Розв'язання (метод слідів). Етапи побудови перерізу (мал. 1.1). Для побудови перерізу скористаємося методом слідів. Побудуємо слід січної площини в площині α, площині основи призми. Цей слід використаємо для того, щоб отримати точки перетину січної площини з ребрами призми. Для побудови сліду січної площини в площині α знайдемо точки перетину прямих MK і NK, які лежать в січній площині, з площиною α, тобто $(MK) \cap (GE) = X$, $(NK) \cap (FE) = Y$. Через знайдені точки X і Y проведемо пряму XY — слід січної площини у площині α, площині основи призми.

У цьому випадку для побудови перерізу не вистачає точки перетину січної площини з ребром BH призми, або з її продовженнями. Продовжимо сторону HF основи до перетину з прямою XY. Отри-



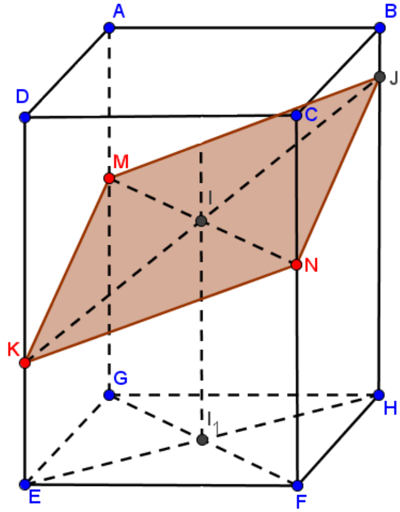
Мал. 1.1.

мана точка I належить січній площині (так як лежить на прямій XY) і площині грані $CFHB$ (так як лежить на прямій HF). Точка N належить цим двом площинам, тому пряма IN — лінія їх перетину, а отримана при цьому точка J — точка перетину січної площини з ребром BH призми. Послідовне з'єднання відрізками пар точок перетину січної площини з ребрами призми, які лежать на одній грані, дає сторони перерізу. В даному випадку шуканим перерізом є чотирикутник $KNJM$.

Розв'язання (метод паралельного проектування). Етапи побудови перерізу (мал. 1.2).

За напрям паралельного проектування візьмемо, наприклад, ребро DE, а за площину проекцій α — площину нижньої основи даної призми.

Знаходимо паралельні проекції даних точок K, N, M на площину α. Ними будуть точки E, F, G відповідно.



Мал. 1.2.

В основі призми позначимо чотири точки: $GEFH$. Проводимо діагоналі чотирикутника $GEFH$, перетин яких дає точку I_1: $[EH]\cap\cap[GF] = I_1$. Проведемо через точку I_1 пряму, паралельну напряму проектування DE. Перетин цієї прямої з відрізком MN дасть точку I.

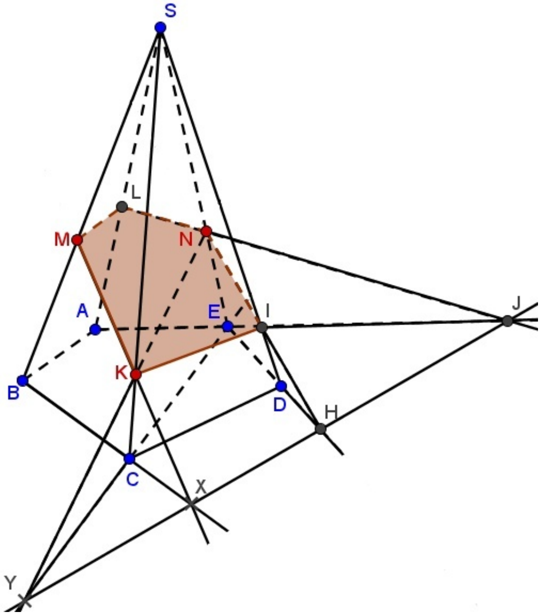
Точки K, I і ребро BH лежать в одній площині DEH, а тому $[KI) \cap [BH] = J$.

Сполучивши попарно точки K, N, J і M відрізками прямих, дістанемо шуканий переріз — чотирикутник $KNJM$.

Задача 1.2. *Побудувати переріз п'ятикутної піраміди площиною, що проходить через точки* $M \in [SB]$, $N \in [SE]$, $K \in [SC]$.

Розв'язання (метод слідів). Етапи побудови перерізу (мал. 1.3).

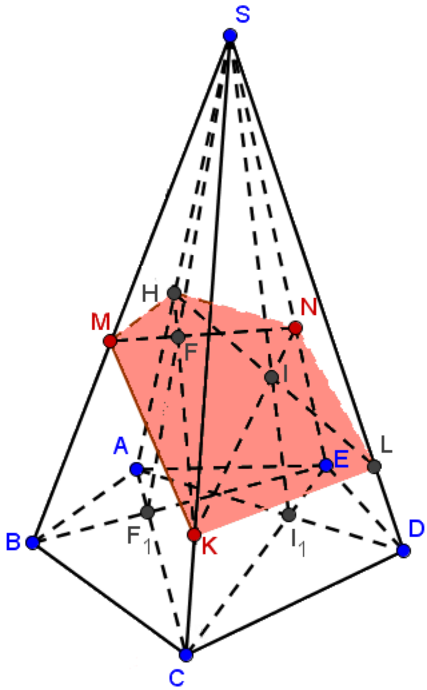
1. (BC).
2. (MK).
3. $(BC) \cap (MK) = X$.
4. (NK).



Мал. 1.3.

5. (EC).
6. $(NK) \cap (EC) = Y$.
7. (XY) — слід січної площини.
8. $[ED)$.
9. $(XY) \cap [ED) = H$.
10. $[HN)$.
11. $[HN) \cap [SD] = I$.
12. $[AE)$.
13. $[AE) \cap (XY) = J$.
14. $[JN)$.
15. $[JN) \cap [SA] = L$.
16. $LMKIN$ — шуканий переріз.

Розв'язання (метод центрального проектування). Етапи побудови перерізу (мал. 1.4). За центр проекцій візьмемо вершину S піраміди, а за площину проекцій α — площину основи даної пірамі-



Мал. 1.4.

ди. Знаходимо центральні проекції даних точок K, N, M на площині α. Ними будуть точки C, E, B відповідно. Отже, $C = \text{пр}_\alpha K; E = \text{пр}_\alpha N; B = \text{пр}_\alpha M$. В основі піраміди — у площині α відмітимо чотири точки: B, C, E, A.

Проводимо діагоналі чотирикутника $BCEA$, перетин яких дає точку F_1: $[BE] \cap [AC] = F_1$. З'єднаємо точки M і N. $[BE] = \text{пр}_\alpha[MN]$. Відрізки MN і BE належать площині BSE. З'єднаємо F_1 і S. $[SF_1] \cap [MN] = F$.

Точки K, F і ребро $[SA]$ лежать в одній площині SAC, а тому $[KF) \cap [SA] = H$.

Знову відмітимо чотири точки у площині α, наприклад, A, C, D, E і також знаходимо точку перетину діагоналей чотирикутника $ACDE$, а потім і шукану точку L: $[AD] \cap [EC] = I_1$. З'єднаємо точки K і N. $[CE] = \text{пр}_\alpha[KN]$. Відрізки KN і CE належать площині SEC. З'єднаємо I_1 і S. $[SI_1] \cap [KN] = I$.

Через те, що точки H, I і ребро SD належать одній площині SAD, то $[HI) \cap [SD] = L$.

Сполучивши попарно точки M, K, L, N і H відрізками прямих, дістанемо шуканий переріз — п'ятикутник $MKLNH$.

1.2 Переріз задано трьома точками на ребрах многогранника

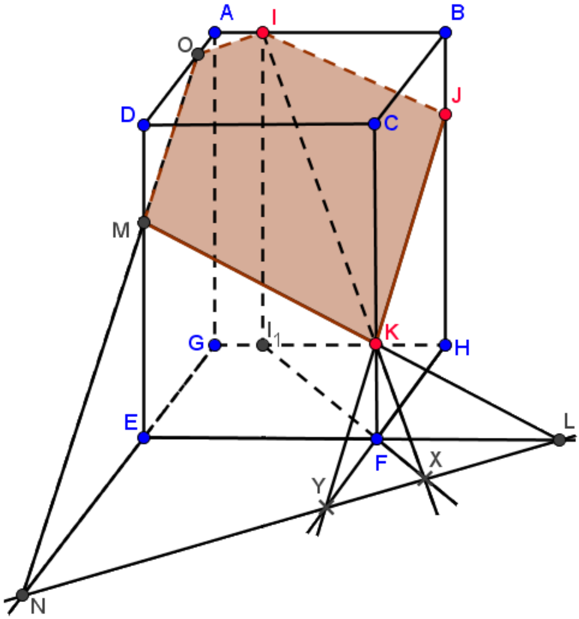
Задача 1.3. *Побудувати переріз чотирикутної призми площиною, що проходить через точки $I \in [AB]$, $J \in [BH]$, $K \in [CF]$.*

Розв'язання (метод слідів). Етапи побудови перерізу (мал. 1.5).

1. $[IK)$.
2. $[II_1] \parallel (DE)$;
3. $[I_1F)$.
4. $(IK) \cap (I_1F) = X$.
5. (JK).
6. (HF).
7. $(JK) \cap (HF) = Y$.
8. (XY) — слід січної площини.
9. $[EF)$.
10. $(XY) \cap [EF) = L$.
11. $[LK) \cap [DE] = M$.
12. $[GE)$.
13. $(XY) \cap [GE) = N$.
14. $[NM)$.
15. $[NM) \cap [DA] = O$.
16. П'ятикутник $MKJIO$ — шуканий переріз.

Розв'язання (метод паралельного проектування). Етапи побудови перерізу (мал. 1.6).

1. $I_1 = \text{пр}_\alpha I$
2. $[EH]$.
3. (I_1F).



Мал. 1.5.

4. $[EH] \cap (I_1F) = L_1$.

5. Проведемо через точку L_1 пряму, паралельну DE. Вона перетне відрізок IK у точці L.

6. $[JL)$.

7. $[JL) \cap [DE] = M$.

8. $[GF]$.

9. $[EI_1]$.

10. $[GF] \cap [EI_1] = N_1$.

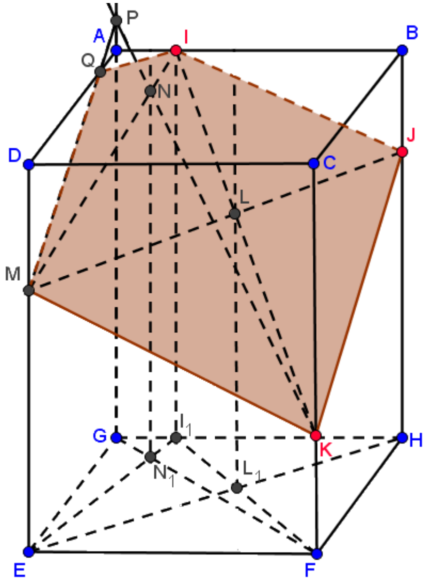
11. Проведемо через точку N_1 пряму, паралельну DE. Вона перетне відрізок MI у точці N.

12. $[KN)$.

13. $[KN) \cap [GA) = P$.

14. (PM).

15. $(PM) \cap [AD] = Q$.



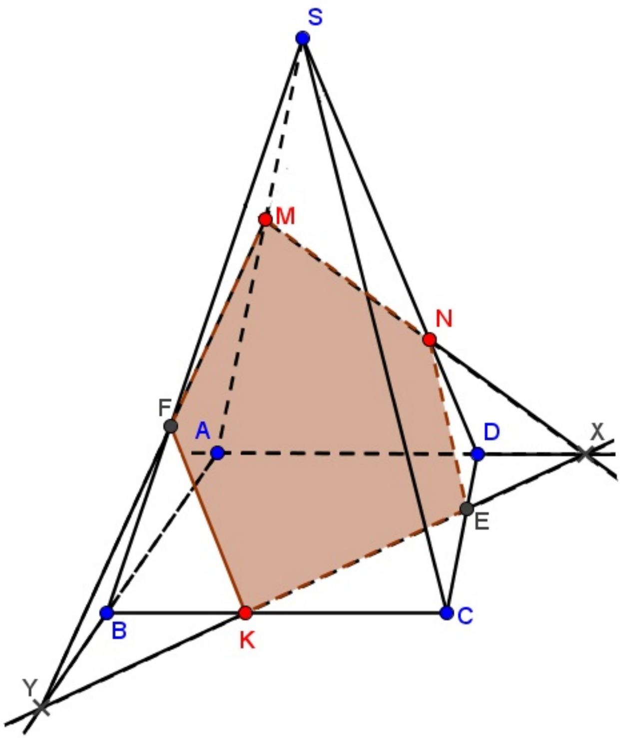
Мал. 1.6.

16. Сполучивши попарно точки M, K, J, I і Q відрізками прямих, шуканий переріз — п'ятикутник $MKJIQ$.

Задача 1.4. *Побудувати переріз чотирикутної піраміди площиною, що проходить через точки $M \in [SA]$, $N \in [SD]$, $K \in [BC]$.*

Розв'язання (метод слідів). Етапи побудови перерізу (мал. 1.7).

1. (MN).
2. (AD).
3. $(MN) \cap (AD) = X$.
4. (KX) — слід січної площини.
5. $(KX) \cap [DC] = E$.
6. $[AB)$.
7. $[AB) \cap (KX) = Y$.
8. $[YM)$.
9. $[YM) \cap [SB] = F$.

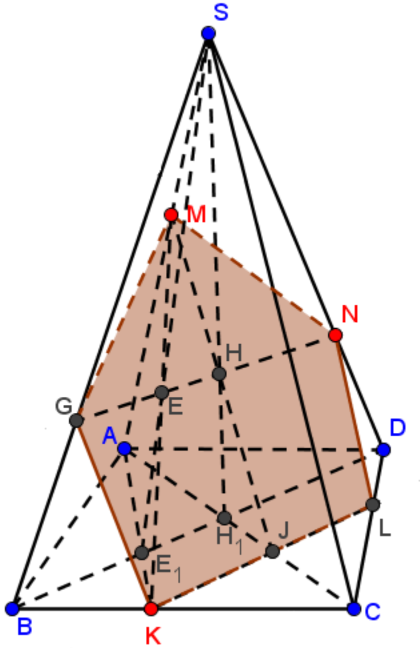


Мал. 1.7.

10. Сполучивши попарно точки M, F, K, E і N відрізками прямих, дістанемо шуканий переріз — п'ятикутник $MFKEN$.

Розв'язання (метод центрального проектування). Етапи побудови перерізу (мал. 1.8).

1. Трикутник ADK — центральна проекція трикутника MNK.
2. $[AK]$.
3. $[BD]$.
4. $[AK] \cap [BD] = E_1$.
5. $[SE_1]$.
6. $[MK]$.
7. $[SE_1] \cap [MK] = E$.



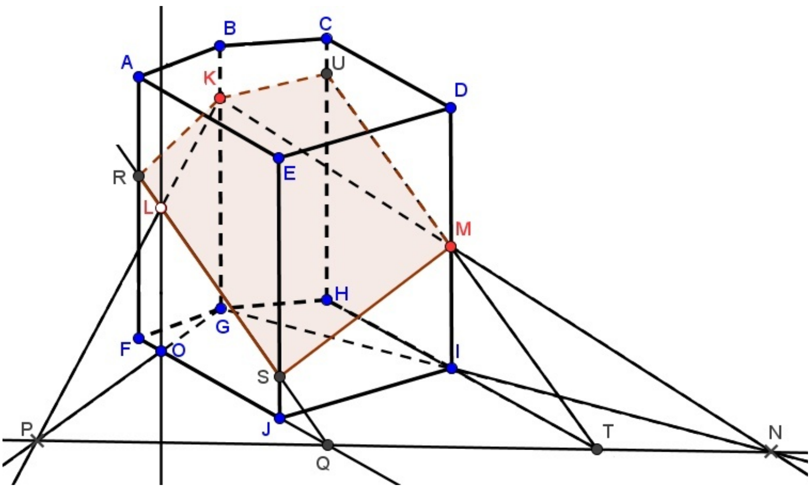
Мал. 1.8.

8. $[NE)$.
9. $[NE) \cap [SB] = G$.
10. $[AC]$.
11. $[AC] \cap [BD] = H_1$.
12. $[SH_1]$.
13. $[GN]$.
13. $[SH_1] \cap [GN] = H$.
15. $[MH)$.
16. $[MH) \cap [AC] = J$.
17. $[KJ)$.
18. $[KJ) \cap [CD] = L$.
19. П'ятикутник $MGKLN$ — шуканий переріз.

1.3 Переріз задано трьома точками на ребрах і гранях многогранника

Задача 1.5. *Побудувати переріз п'ятикутної призми площиною, що проходить через точки $K \in [BG]$, $M \in [DI]$, $L \in (AFJ)$.*

Розв'язання (метод слідів). Коротко опишемо етапи побудови перерізу (мал. 1.9).



Мал. 1.9.

1. (KM).
2. (GI).
3. $(KM) \cap (GI) = N$.
4. Проведемо через точку L пряму, паралельну AF. Вона перетне відрізок FJ у точці O.
5. (KL).
6. (GO).
7. $(KL) \cap (GO) = P$.
8. (PN) — слід січної площини.
9. $[OJ)$.
10. $[OJ) \cap (PN) = Q$.

11. $[QL)$.

12. $[QL) \cap [AF] = R$.

13. $[QL) \cap [EJ] = S$.

14. $[HI)$.

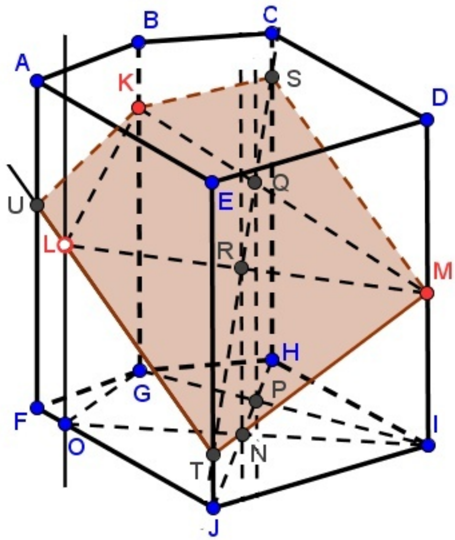
15. $[HI) \cap (PN) = T$.

16. $[TM)$.

17. $[TM) \cap [CH] = U$.

18. Сполучивши попарно точки R, S, M, U і K відрізками прямих, дістанемо шуканий переріз — п'ятикутник $RSMUK$.

Розв'язання (метод паралельного проектування). Коротко опишемо етапи побудови перерізу (мал. 1.10).



Мал. 1.10.

1. Трикутник KLM.

2. $G = \text{пр}_\alpha K$, $O = \text{пр}_\alpha L$, $I = \text{пр}_\alpha M$.

3. $[OI]$.

4. $[GI]$.

5. $[HJ]$.

6. $[HJ] \cap [GI] = P$.

7. $[HJ] \cap [OI] = N$.

8. Проведемо через точку P пряму, паралельну AF. Вона перетне відрізок KM у точці Q.

9. Проведемо через точку N пряму, паралельну AF. Вона перетне відрізок LM у точці R.

10. (QR).

11. $(QR) \cap (CH) = S$.

12. $(QR) \cap (EJ) = T$.

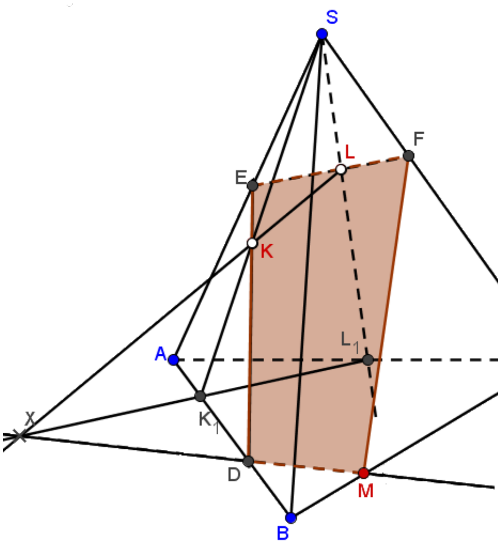
13. $[TL)$.

14. $[TL) \cap [AF] = U$.

15. П'ятикутник $KUTMS$ — шуканий переріз.

Задача 1.6. *Побудувати переріз трикутної піраміди площиною, що проходить через точки* $K \in (SAB)$, $L \in (SAC)$, $M \in [BC]$.

Розв'язання (метод слідів). Коротко опишемо етапи побудови перерізу (мал. 1.11).



Мал. 1.11.

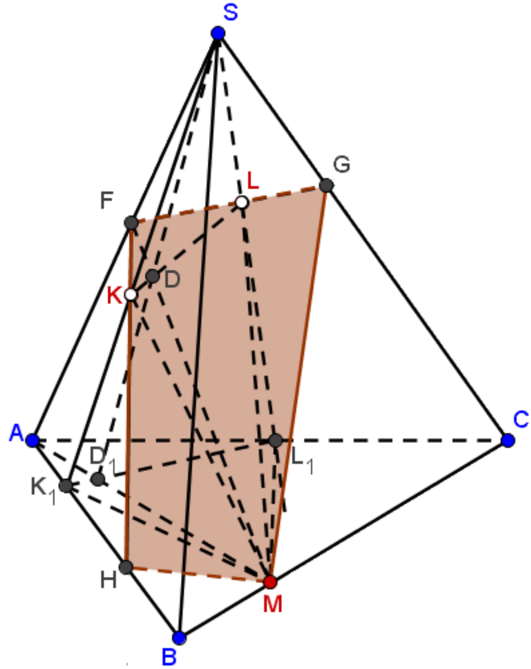
1. $[SK) \cap [AB] = K_1$.
2. $[SL) \cap [AC] = L_1$.
3. (LK).
4. (L_1K_1).
5. $(LK) \cap (L_1K_1) = X$.
6. (XM) — слід січної площини.
7. $(XM) \cap [AB] = D$.
8. $[DK)$.
9. $[DK) \cap [SA] = E$.
10. $[EL)$.
11. $[EL) \cap [SC] = F$.
12. Сполучивши попарно точки E, D, M, F відрізками прямих, дістанемо шуканий переріз — чотирикутник $EDMF$.

Розв'язання (метод центрального проектування). Коротко опишемо етапи побудови перерізу (мал. 1.12).

1. Трикутник K_1L_1M — центральна проекція трикутника KLM.
2. $[AM]$.
3. $[K_1L_1]$.
4. $[AM] \cap [K_1L_1] = D_1$.
5. $[SD_1]$.
6. $[SD_1] \cap [KL] = D$.
7. $[MD)$.
8. $[MD) \cap [SA] = F$.
9. $[FK)$.
10. $[FK) \cap [AB] = H$.
11. $[FL)$.
12. $[FL) \cap [SC] = G$.
13. Чотирикутник $FHMG$ — шуканий переріз.

1.4 Переріз задано трьома точками на гранях многогранника або на поверхні тіла обертання

Задача 1.7. *Побудувати переріз трикутної призми площиною, що проходить через точки $K \in (ADF)$, $N \in (DFE)$, $M \in (CFE)$.*



Мал. 1.12.

Розв'язання (метод слідів). Етапи побудови перерізу (мал. 1.13).

1. Проведемо через точку K пряму, паралельну AD. Вона перетне відрізок DF у точці K_1.

2. Проведемо через точку M пряму, паралельну AD. Вона перетне відрізок FE у точці M_1.

3. (MK).

4. (M_1K_1).

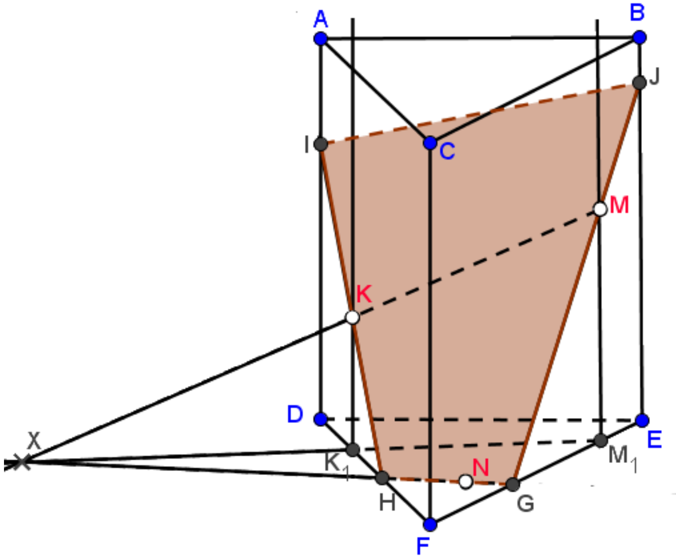
5. $(MK) \cap (M_1K_1) = X$.

6. (XN) — слід січної площини.

7. $(XN) \cap [DF] = H$.

8. $(XN) \cap [FE] = G$.

9. $[HK)$.



Мал. 1.13.

10. $[HK) \cap [AD] = I$.

11. $[GM)$.

12. $[GM) \cap [BE] = J$.

13. Сполучивши попарно точки I, H, G, J відрізками прямих, дістанемо шуканий переріз — чотирикутник $IHGJ$.

Розв'язання (метод паралельного проектування). Етапи побудови перерізу (мал. 1.14).

1. $K_1 = \text{пр}_\alpha K$.

2. $M_1 = \text{пр}_\alpha M$.

3. $[DN]$.

4. $[K_1 M_1]$.

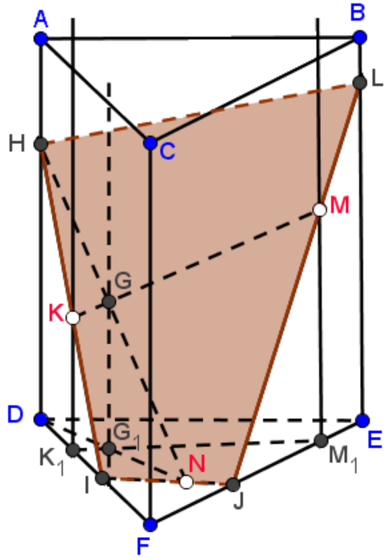
5. $[DN] \cap [K_1 M_1] = G_1$.

6. $[KM]$.

7. Проведемо через точку G_1 пряму, паралельну AD. Вона перетне відрізок KM у точці G.

8. $[NG)$.

9. $[NG) \cap [AD] = H$.

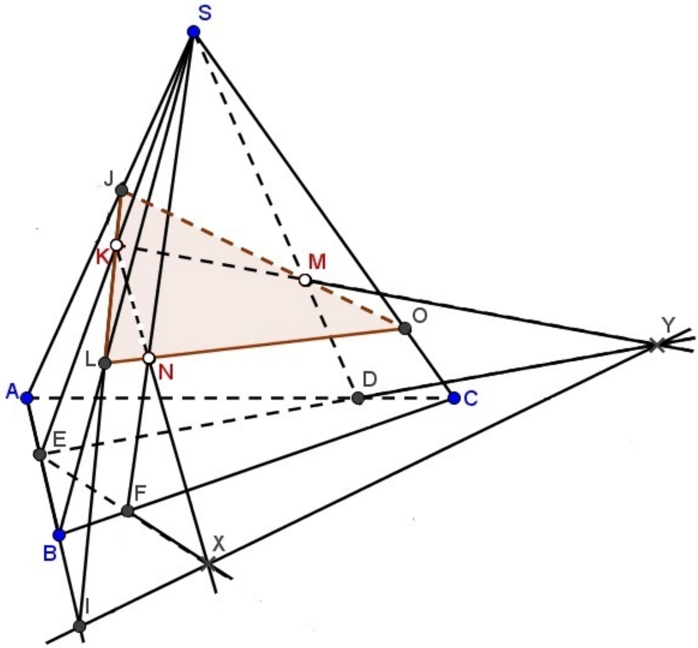


Мал. 1.14.

10. $[HK)$.
11. $[HK) \cap [DF] = I$.
12. $[IN)$.
13. $[IN) \cap [FE] = J$.
14. $[JM)$.
15. $[JM) \cap [BE] = L$.
16. Сполучивши попарно точки H, I, J, L відрізками прямих, дістанемо шуканий переріз — чотирикутник $HIJL$.

Задача 1.8. *Побудувати переріз трикутної піраміди площиною, що проходить через точки* $K \in (SAB)$, $N \in (SBC)$, $M \in (SAC)$.

Розв'язання (метод слідів). Етапи побудови перерізу (мал. 1.15).
1. $[SK) \cap [AB] = E$.
2. $[SN) \cap [BC] = F$.
3. $[SM) \cap [AC] = D$.

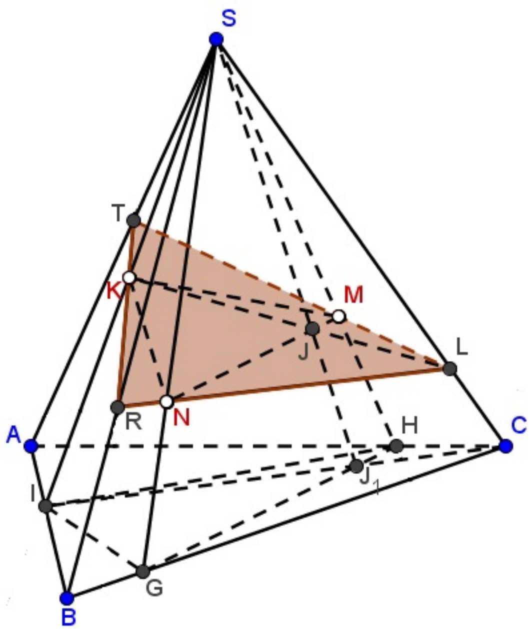


Мал. 1.15.

4. (KN).
5. (EF).
6. $(KN) \cap (EF) = X$;
7. (KM).
8. (ED).
9. $(KM) \cap (ED) = Y$.
10. (XY) — слід січної площини.
11. $[AB)$.
12. $[AB) \cap (XY) = I$.
13. $[IK)$.
14. $[IK) \cap [SB] = L$.
15. $[IK) \cap [SA] = J$.
16. $[JM)$.
17. $[JM) \cap [SC] = O$.

18. Сполучивши попарно точки J, L, O відрізками прямих, дістанемо шуканий переріз — трикутник JLO.

Розв'язання (метод центрального проектування). Етапи побудови перерізу (мал. 1.16).



Мал. 1.16.

1. Трикутник IHG — центральна проекція трикутника KMN.
2. $[IC]$.
3. $[HG]$.
4. $[IC] \cap [HG] = J_1$.
5. $[SJ_1]$.
6. $[SJ_1] \cap [MN] = J$.
7. $[KJ)$.
8. $[KJ) \cap [SC] = L$.
9. $[LN)$.
10. $[LN) \cap [SB] = R$.

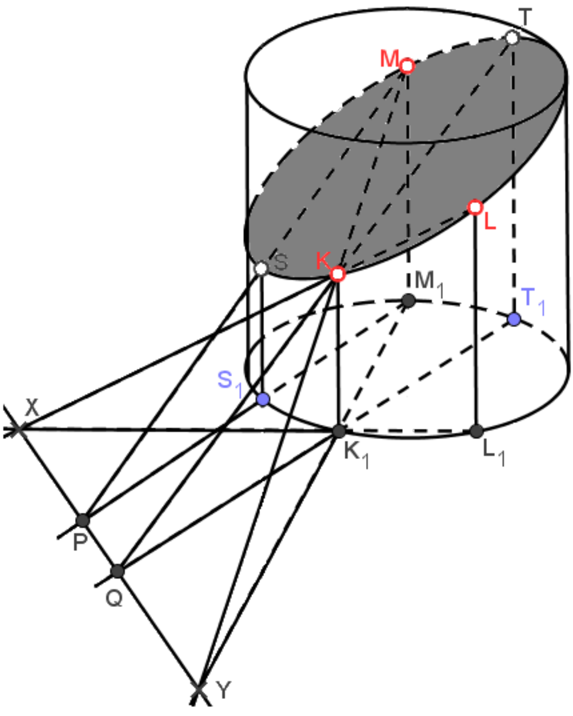
11. $[LM)$.

12. $[LM) \cap [SA] = T$.

13. Сполучивши попарно точки T, R, L відрізками прямих, дістанемо шуканий переріз — трикутник TRL.

Задача 1.9. *Побудувати переріз циліндра площиною, заданою трьома точками K, L, M, які належать поверхні циліндра.*

Розв'язання (метод слідів). Коротко опишемо етапи побудови перерізу (мал. 1.17).



Мал. 1.17.

1. (LK).
2. (L_1K_1).
3. $(LK) \cap (L_1K_1) = X$.

4. (MK).

5. (M_1K_1).

6. $(MK) \cap (M_1K_1) = Y$.

7. (XY) — слід січної площини.

8. S_1 — довільна точка кола, що лежить в основі циліндра.

9. (M_1S_1).

10. $(M_1S_1) \cap (XY) = P$.

11. $[PM)$.

12. Проведемо через точку S_1 пряму, паралельну прямій MM_1. Вона перетне промінь PM в точці S.

13. T_1 — довільна точка кола, що лежить в основі циліндра.

14. (T_1K_1).

15. $(T_1K_1) \cap (XY) = Q$.

16. $[QK)$.

17. Проведемо через точку T_1 пряму, паралельну прямій MM_1. Вона перетне промінь QK в точці T.

18. Будуємо шуканий переріз по точках M, S, K, L, T.

Розв'язання (метод паралельного проектування). Коротко опишемо етапи побудови перерізу (мал. 1.18).

1. $K_1 = \text{пр}_\alpha K$.

2. $L_1 = \text{пр}_\alpha L$.

3. $M_1 = \text{пр}_\alpha M$.

3. S_1 — довільна точка кола, що лежить в основі циліндра.

4. $[S_1L_1]$.

5. $[K_1M_1]$.

6. $[S_1L_1] \cap [K_1M_1] = X_1$.

7. Проведемо через точку X_1 пряму, паралельну прямій MM_1. Вона перетне відрізок KM в точці X.

8. $[LX)$.

9. Проведемо через точку S_1 пряму, паралельну прямій MM_1. Вона перетне промінь LX в точці S.

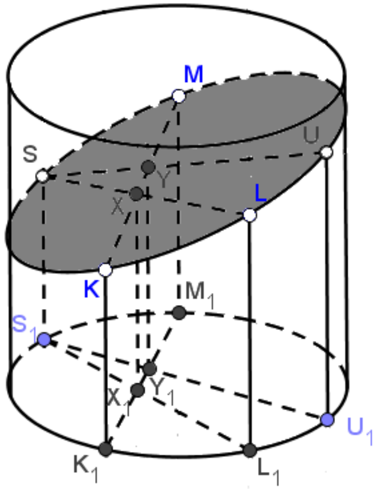
10. U_1 — довільна точка кола, що лежить в основі циліндра.

11. $[U_1S_1]$.

12. $[U_1S_1] \cap [K_1M_1] = Y_1$.

13. Проведемо через точку Y_1 пряму, паралельну прямій MM_1. Вона перетне відрізок KM в точці Y.

14. $[SY)$.



Мал. 1.18.

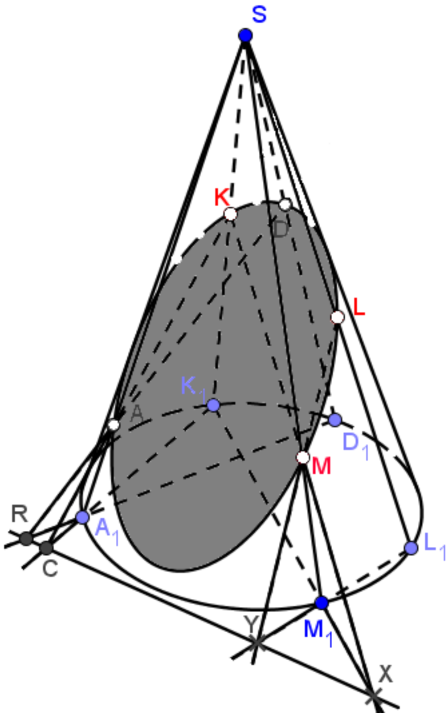
15. Проведемо через точку U_1 пряму, паралельну прямій MM_1. Вона перетне промінь SY в точці U.

16. Будуємо шуканий переріз по точках M, S, K, L, U.

Задача 1.10. *Побудувати переріз конуса площиною, заданою трьома точками K, L, M, які належать конічній поверхні.*

Розв'язання (метод слідів). Коротко опишемо етапи побудови перерізу (мал. 1.19).

1. (KM).
2. (K_1M_1).
3. $(KM) \cap (K_1M_1) = X$.
4. (LM).
5. (L_1M_1).
6. $(LM) \cap (L_1M_1) = Y$.
7. A_1 — довільна точка кола, що лежить в основі конуса.
8. (K_1A_1).
9. $(K_1A_1) \cap (XY) = C$.
10. $[CK)$.

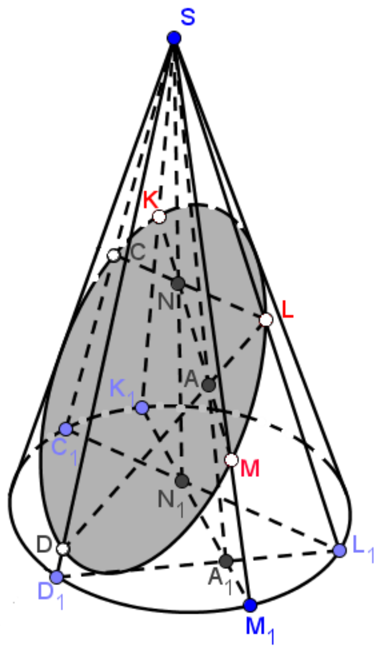


Мал. 1.19.

11. $[CK) \cap [SA_1] = A$.
12. D_1 — довільна точка кола, що лежить в основі конуса.
13. (D_1A_1).
14. $(D_1A_1) \cap (XY) = R$.
15. $[RA)$.
16. $[RA) \cap [SD_1] = D$.
17. Будуємо шуканий переріз по точках K, A, M, L, D.

Розв'язання (метод центрального проектування). Коротко опишемо етапи побудови перерізу (мал. 1.20).

1. $K_1 = \text{пр}_\alpha K$.
2. $L_1 = \text{пр}_\alpha L$.
3. $M_1 = \text{пр}_\alpha M$.



Мал. 1.20.

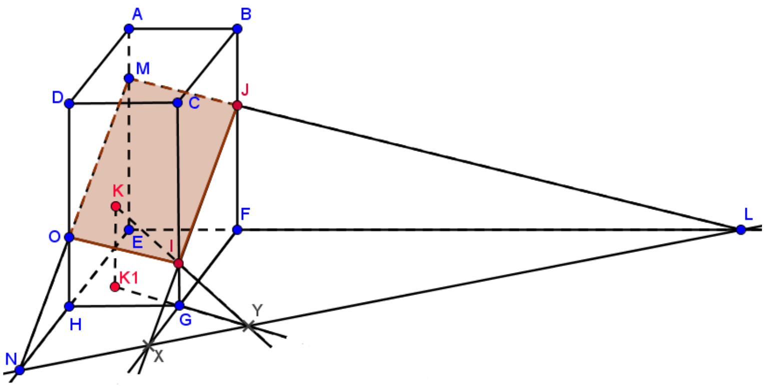
4. C_1 — довільна точка кола, що лежить в основі конуса.
5. $[C_1L_1]$.
6. $[M_1K_1]$.
7. $[C_1L_1] \cap [M_1K_1] = N_1$.
8. $[SN_1]$.
9. $[MK]$.
10. $[SN_1] \cap [MK] = N$.
11. $[LN)$.
12. $[LN) \cap [SC_1] = C$.
13. D_1 — довільна точка кола, що лежить в основі конуса.
14. $[D_1L_1]$.
15. $[D_1L_1] \cap [M_1K_1] = A_1$.
16. $[SA_1]$.
17. $[SA_1] \cap [MK] = A$.

18. $[LA)$.
19. $[LA) \cap [SD_1] = D$.
20. Будуємо шуканий переріз по точках K, C, D, M, L.

1.5 Переріз задано трьома точками, деякі з яких лежать всередині просторового тіла

Задача 1.11. *Побудувати переріз призми площиною, заданою точками I, J, K, якщо відомо, що точка K_1 є проекцією точки K на площину основи призми у напрямку проектування, заданому вектором BF.*

Розв'язання (метод слідів). Коротко опишемо етапи побудови перерізу (мал. 1.21).



Мал. 1.21.

1. $[JI)$.
2. $[FG)$.
3. $[JI) \cap [FG) = X$.
4. $[KI)$.
5. $[K_1G)$.
6. $[KI) \cap [K_1G) = Y$.

7. (XY) — слід січної площини.

8. $[EF)$.

9. $[EF) \cap (XY) = L$.

10. $[LJ)$.

11. $[LJ) \cap [AE] = M$.

12. $[EH)$.

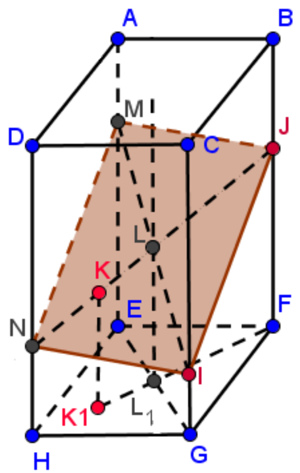
13. $[EH) \cap (XY) = N$.

14. $[NM)$.

15. $[NM) \cap [DH] = O$.

16. Сполучивши попарно точки M, O, I, J відрізками прямих, дістанемо шуканий переріз — чотирикутник $MOIJ$.

Розв'язання (метод паралельного проектування). Коротко опишемо етапи побудови перерізу (мал. 1.22).



Мал. 1.22.

1. $[EG]$.

2. $[K_1F]$.

3. $[EG] \cap [[K_1F] = L_1$.

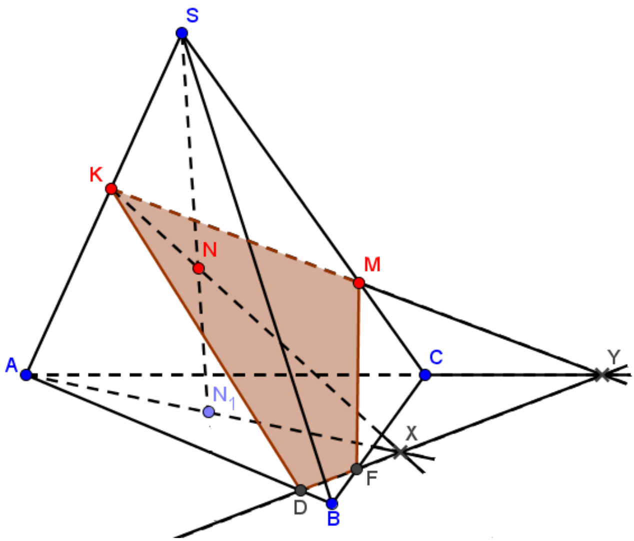
4. Проведемо через точку L_1 пряму, паралельну BF. Вона перетне відрізок KJ у точці L.

5. $[IL)$.

6. $[IL) \cap [AE] = M$.
7. $[JK)$.
8. $[JK) \cap [DH] = N$.
9. Сполучивши попарно точки M, N, I, J відрізками прямих, дістанемо шуканий переріз — чотирикутник $MNIJ$.

Задача 1.12. *Побудувати переріз трикутної піраміди площиною,заданою трьома точками, дві з яких $K \in [SA]$ і $M \in [SC]$ належать бічним ребрам, а третя N лежить всередині піраміди, причому відомо, що точка N_1 є центральною проекцією точки N на площину основи піраміди.*

Розв'язання (метод слідів). Коротко опишемо етапи побудови перерізу (мал. 1.23).



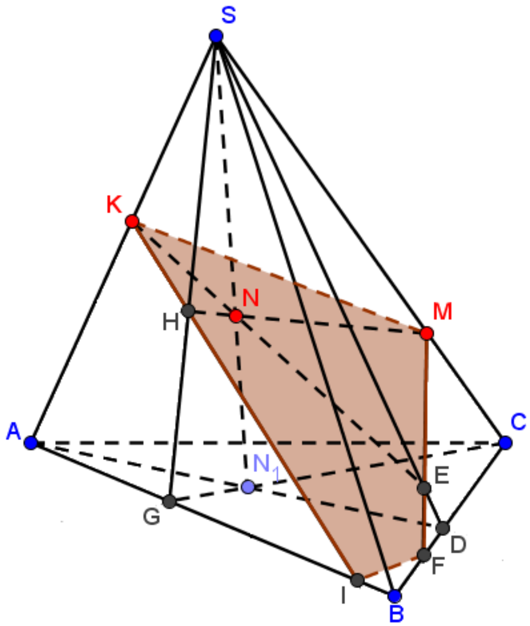
Мал. 1.23.

1. (KN).
2. (AN_1).
3. $(KN) \cap (AN_1) = X$.
4. (KM).

5. (AC).
6. $(KM) \cap (AC) = Y$.
7. (XY) — слід січної площини.
8. $[CB] \cap (XY) = F$.
9. $[AB] \cap (XY) = D$.

10. Сполучивши попарно точки K, D, F, M відрізками прямих, дістанемо шуканий переріз — чотирикутник $KDFM$.

Розв'язання (метод центрального проектування). Коротко опишемо етапи побудови перерізу (мал. 1.24).



Мал. 1.24.

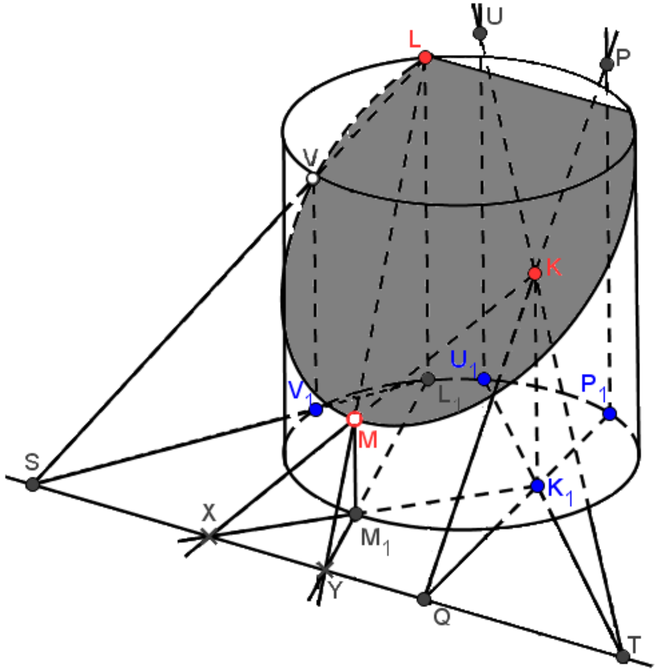
1. $[AN_1)$.
2. $(AN_1) \cap [BC] = D$.
3. $[SD]$.
4. $[KN)$.
5. $[KN) \cap [SD] = E$.

6. $[ME)$.
7. $[ME) \cap [BC] = F$.
8. $[CN_1)$.
9. $[CN_1) \cap [AB] = G$.
10. $[SG]$.
11. $[MN)$.
12. $[MN) \cap [SG] = H$
13. $[KH)$.
14. $[KH) \cap [AB] = I$.
15. Чотирикутник $KIFM$ — шуканий переріз.

Задача 1.13. *Побудувати переріз циліндра площиною, заданою трьома точками, дві з яких належать поверхні циліндра, а третя лежить всередині нього.*

Розв'язання (метод слідів). Коротко опишемо етапи побудови перерізу (мал. 1.25).

1. (KM).
2. (K_1M_1).
3. $(KM) \cap (K_1M_1) = X$.
4. (LM).
5. (L_1M_1).
6. $(LM) \cap (L_1M_1) = Y$.
7. (XY) — слід січної площини.
8. P_1 — довільна точка кола, що лежить в основі циліндра.
9. (P_1K_1).
10. $(P_1K_1) \cap (XY) = Q$.
11. $[QK)$.
12. Проведемо через точку P_1 пряму, паралельну прямій MM_1. Вона перетне промінь QK в точці P.
13. U_1 — довільна точка кола, що лежить в основі циліндра.
14. (U_1K_1).
15. $(U_1K_1) \cap (XY) = T$.
16. $[TK)$.
17. Проведемо через точку U_1 пряму, паралельну прямій MM_1. Вона перетне промінь TK в точці U.
18. V_1 — довільна точка кола, що лежить в основі циліндра.
19. (L_1V_1).



Мал. 1.25.

20. $(L_1V_1) \cap (XY) = S$.

21. $[SL)$.

22. Проведемо через точку V_1 пряму, паралельну прямій MM_1. Вона перетне промінь SL в точці V.

23. Будуємо шуканий переріз по точках L, V, M, P, U.

Розв'язання (метод паралельного проектування). Коротко опишемо етапи побудови перерізу (мал. 1.26).

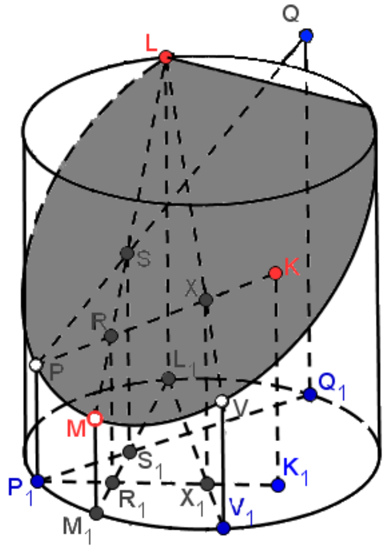
1. $M_1 = \text{пр}_\alpha M$.

2. $L_1 = \text{пр}_\alpha L$.

3. P_1 — довільна точка кола, що лежить в основі циліндра.

4. $[P_1K_1]$.

5. $[M_1L_1]$.



Мал. 1.26.

6. $[P_1K_1] \cap [M_1L_1] = R_1$.

7. Проведемо через точку R_1 пряму, паралельну прямій MM_1. Вона перетне відрізок ML в точці R.

8. $[KR)$.

9. Проведемо через точку P_1 пряму, паралельну прямій MM_1. Вона перетне промінь KR в точці P.

10. Q_1 — довільна точка кола, що лежить в основі циліндра.

11. $[Q_1P_1]$.

12. $[Q_1P_1] \cap [M_1L_1] = S_1$.

13. Проведемо через точку S_1 пряму, паралельну прямій MM_1. Вона перетне відрізок ML в точці S.

14. $[PS)$.

15. Проведемо через точку Q_1 пряму, паралельну прямій MM_1. Вона перетне промінь PS в точці Q.

16. V_1 — довільна точка кола, що лежить в основі циліндра.

17. $[V_1L_1]$.

18. $[V_1L_1] \cap [P_1K_1] = X_1$.

19. Проведемо через точку X_1 пряму, паралельну прямій MM_1. Вона перетне відрізок PK в точці X.

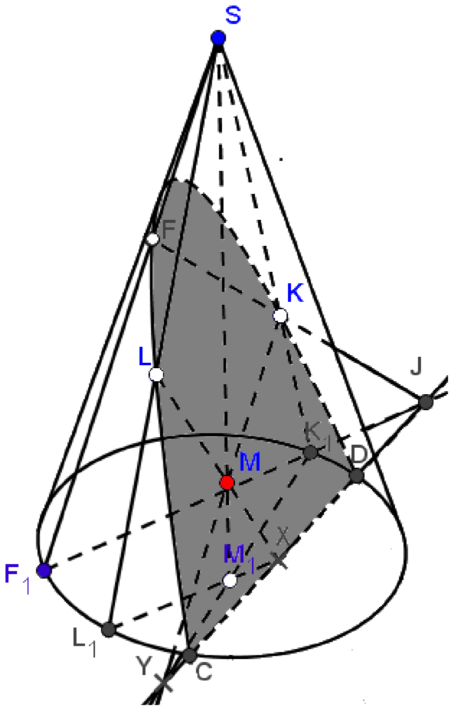
20. $[LX)$.

21. Проведемо через точку V_1 пряму, паралельну прямій MM_1. Вона перетне промінь LX в точці V.

22. Будуємо шуканий переріз по точках L, P, M, V, Q.

Задача 1.14. *Побудувати переріз конуса площиною, заданою трьома точками, дві з яких належать конічній поверхні, а третя лежить всередині конуса.*

Розв'язання (метод слідів). Коротко опишемо етапи побудови перерізу (мал. 1.27).



Мал. 1.27.

1. (LM).

2. (L_1M_1).

3. $(LM) \cap (L_1M_1) = X$.

4. (KM).

5. (K_1M_1).

6. $(KM) \cap (K_1M_1) = Y$.

7. (XY) — слід січної площини. Пряма слідів перетинає основу конуса в точках C і D, які є вершинами шуканого перерізу.

8. F_1 — довільна точка кола, що лежить в основі конуса.

9. (F_1K_1).

10. $(F_1K_1) \cap (XY) = J$.

11. $[JK)$.

12. $[JK) \cap [SF_1] = F$.

13. Будуємо шуканий переріз — параболу по точках F, L, C, D, K.

Розв'язання (метод центрального проектування). Коротко опишемо етапи побудови перерізу (мал. 1.28).

1. $K_1 = \text{пр}_\alpha K$.

2. $L_1 = \text{пр}_\alpha L$.

3. A_1 — довільна точка кола, що лежить в основі конуса.

4. $[A_1M_1]$.

5. $[L_1K_1]$.

6. $[A_1M_1] \cap [L_1K_1] = B_1$.

7. $[SB_1]$.

8. $[LK]$.

9. $[SB_1] \cap [LK] = B$.

10. $[MB)$.

11. $[MB) \cap [SA_1] = A$.

12. C_1 — довільна точка кола, що лежить в основі конуса.

13. $[C_1M_1]$.

14. $[L_1K_1] \cap [C_1M_1] = V_1$.

15. $[SV_1]$.

16. $[SV_1] \cap [LK] = V$.

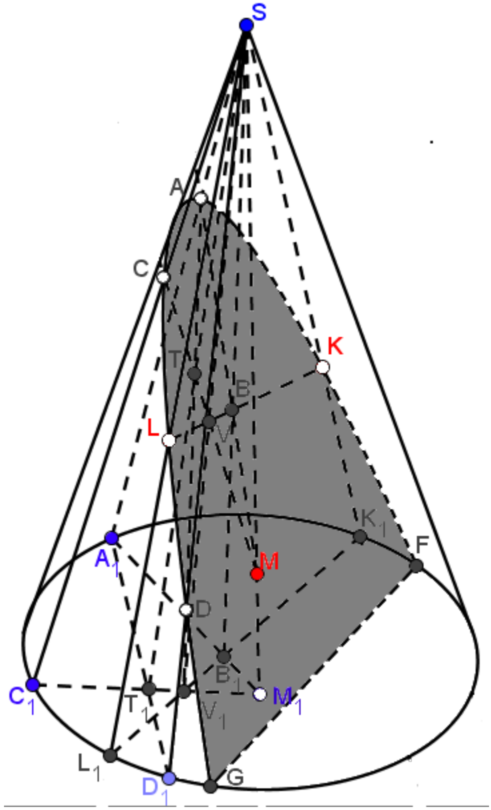
17. $[MV)$.

18. $[MV) \cap [SC_1] = C$.

19. D_1 — довільна точка кола, що лежить в основі конуса.

20. $[D_1A_1]$.

21. $[D_1A_1] \cap [C_1M_1] = T_1$.



Мал. 1.28.

22. $[ST_1]$.

23. $[ST_1] \cap [CM] = T$.

24. $[AT)$.

25. $[AT) \cap [SD_1] = D$.

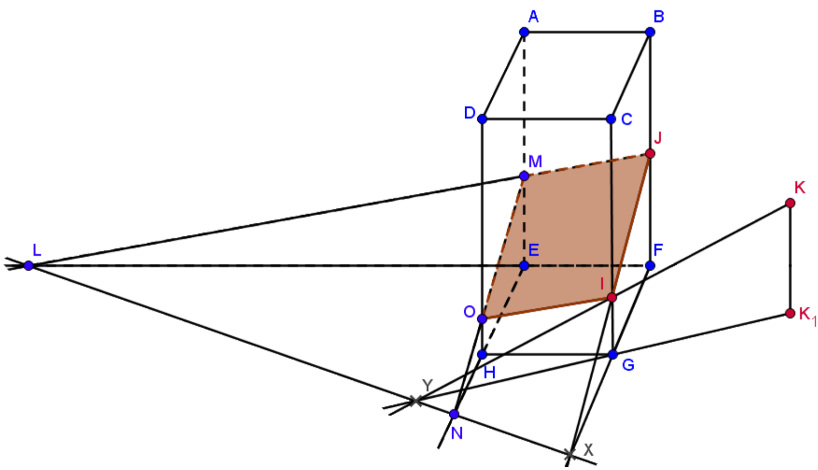
26. Будуємо шуканий переріз — параболу по точках A, C, L, D, K.

1.6 Переріз задано трьома точками, деякі з яких лежать зовні просторового тіла

В задачах такого типу, коли деякі із заданих точок лежать зовні або всередині многогранника чи тіла обертання, в умові задачі слід вказувати проекції таких точок. Це необхідно тому, що від розташування цих проекцій залежить вигляд перерізу просторового тіла. Інакше, якщо проекції точок не вказано, вважається, що умова задачі сформульована некоректно.

Задача 1.15. *Побудувати переріз призми площиною, заданою точками I, J, K, якщо відомо, що точка K_1 є проекцією точки K на площину основи призми у напрямку проектування, заданому вектором BF.*

Розв'язання (метод слідів). Коротко опишемо етапи побудови перерізу (мал. 1.29).

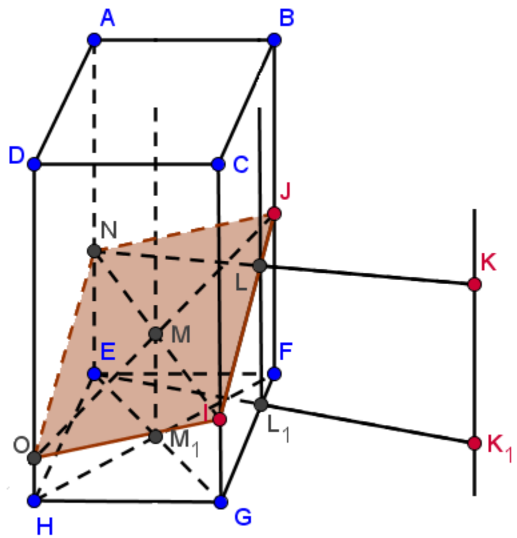


Мал. 1.29.

1. $[JI)$.
2. $[FG)$.
3. $[JI) \cap [FG) = X$.

4. $[KI)$.
5. $[K_1G)$.
6. $[KI) \cap [K_1G) = Y$.
7. (XY) — слід січної площини.
8. $[FE)$.
9. $[FE) \cap (XY) = L$.
10. $[LJ)$.
11. $[LJ) \cap [AE] = M$.
12. $[EH)$.
13. $[EH) \cap (XY) = N$.
14. $[NM)$.
15. $[NM) \cap [DH] = O$.
16. Чотирикутник $MOIJ$ — шуканий переріз.

Розв'язання (метод паралельного проектування). Коротко опишемо етапи побудови перерізу (мал. 1.30).



Мал. 1.30.

1. $[EK_1]$.
2. $[EK_1] \cap [GF] = L_1$.

3. Проведемо через точку L_1 пряму, паралельну BF. Вона перетне відрізок IJ у точці L.

4. $[KL)$.

5. $[KL) \cap [AE] = N$.

6. $[EG]$.

7. $[HF]$.

8. $[EG] \cap [HF] = M_1$.

9. Проведемо через точку M_1 пряму, паралельну BF. Вона перетне відрізок NI у точці M.

10. $[JM)$.

11. $[JM) \cap [DH] = O$.

12. Сполучивши попарно точки N, O, I, J відрізками прямих, дістанемо шуканий переріз — чотирикутник $NOIJ$.

Задача 1.16. *Побудувати переріз чотирикутної піраміди площиною,заданою тръома точками, дві з яких $K \in [SA]$ і $M \in [SC]$ належать протилежним бічним ребрам, а третя G лежить поза пірамідою, причому відомо, що точка G_1 є центральною проекцією точки G на площину основи піраміди.*

Розв'язання (метод слідів). Коротко опишемо етапи побудови перерізу (мал. 1.31).

1. (KM).

2. (AC).

3. $(KM) \cap (AC) = X$.

4. (GM).

5. (G_1C).

6. $(GM) \cap (G_1C) = Y$.

7. (XY) — слід січної площини.

8. $[BC)$.

9. $[BC) \cap (XY) = E$.

10. $[EM)$.

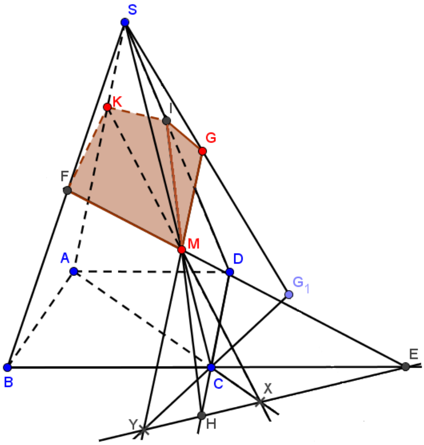
11. $[EM) \cap [SB] = F$.

12. $[DC)$.

13. $[DC) \cap (XY) = H$.

14. $[HM)$.

15. $[HM) \cap [SD] = I$.

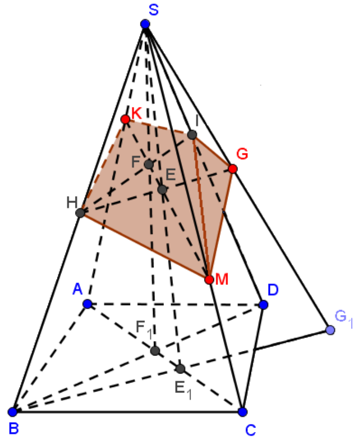


Мал. 1.31.

16. Сполучивши попарно точки F, M, G, I, K відрізками прямих, дістанемо п'ятикутник $FMGIK$. Шуканим перерізом піраміди буде чотирикутник $FMIK$.

Розв'язання (метод центрального проектування). Коротко опишемо етапи побудови перерізу (мал. 1.32).

1. $[BG_1]$.
2. $[AC]$.
3. $[BG_1] \cap [AC] = E_1$.
4. $[SE_1]$.
5. $[KM]$.
6. $[SE_1] \cap [KM] = E$.
7. $[GE)$.
8. $[GE) \cap [SB] = H$.
9. $[BD]$.
10. $[BD] \cap [AC] = F_1$.
11. $[SF_1]$.



Мал. 1.32.

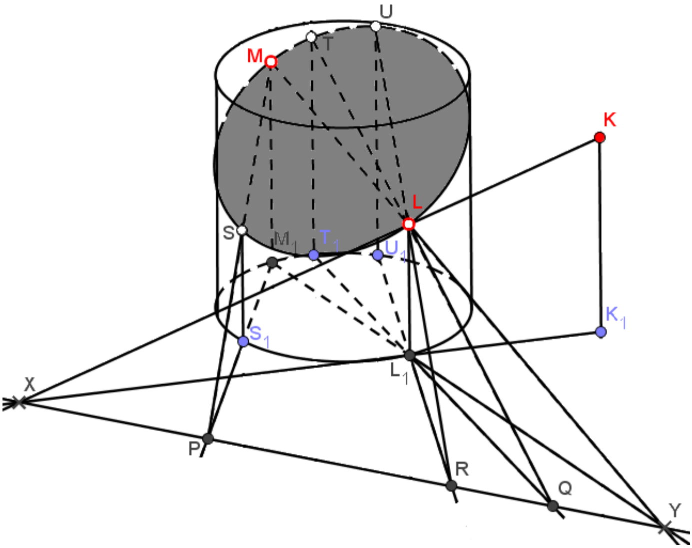
12. $[SF_1] \cap [KM] = F$.
13. $[HF)$.
14. $[HF) \cap [SD] = I$.

15. Сполучивши попарно точки H, M, G, I, K відрізками прямих, дістанемо п'ятикутник $HMGIK$. Шуканим перерізом піраміди буде чотирикутник $HMIK$.

Задача 1.17. *Побудувати переріз циліндра площиною, заданою трьома точками, дві з яких M і L належать поверхні циліндра, а третя K лежить поза ним, причому відома її проекція K_1.*

Розв'язання (метод слідів). Коротко опишемо етапи побудови перерізу (мал. 1.33).

1. (KL).
2. (K_1L_1).
3. $(KL) \cap (K_1L_1) = X$.
4. (ML).



Мал. 1.33.

5. (M_1L_1).
6. $(ML) \cap (M_1L_1) = Y$.
7. (XY) — слід січної площини.
8. S_1 — довільна точка кола, що лежить в основі циліндра.
9. (S_1M_1).
10. $(S_1M_1) \cap (XY) = P$.
11. (PM).
12. Проведемо через точку S_1 пряму, паралельну прямій MM_1. Вона перетне пряму PM в точці S.
13. T_1 — довільна точка кола, що лежить в основі циліндра.
14. (T_1L_1).
15. $(T_1L_1) \cap (XY) = Q$.
16. (QL).
17. Проведемо через точку T_1 пряму, паралельну прямій MM_1. Вона перетне пряму QL в точці T.
18. U_1 — довільна точка кола, що лежить в основі циліндра.
19. (U_1L_1).

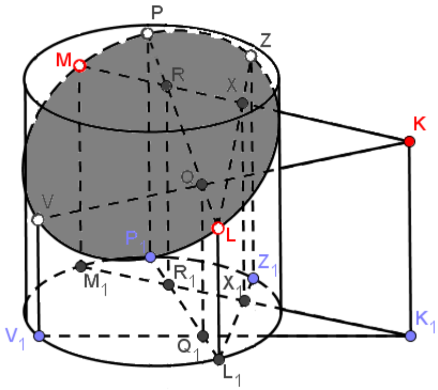
20. $(U_1L_1) \cap (XY) = R$.

21. (RL).

22. Проведемо через точку U_1 пряму, паралельну прямій MM_1. Вона перетне пряму RL в точці U.

23. Будуємо шуканий переріз — еліпс по точках U, T, M, S, L.

Розв'язання (метод паралельного проектування). Коротко опишемо етапи побудови перерізу (мал. 1.34).



Мал. 1.34.

1. $M_1 = \text{пр}_\alpha M$.

2. $L_1 = \text{пр}_\alpha L$.

3. P_1 — довільна точка кола, що лежить в основі циліндра.

4. $[P_1L_1]$.

5. $[M_1K_1]$.

6. $[P_1L_1] \cap [M_1K_1] = R_1$.

7. Проведемо через точку R_1 пряму, паралельну прямій MM_1. Вона перетне відрізок MK в точці R.

8. $[LR)$.

9. Проведемо через точку P_1 пряму, паралельну прямій MM_1. Вона перетне промінь LR в точці P.

10. V_1 — довільна точка кола, що лежить в основі циліндра.

11. $[V_1K_1]$.

12. $[V_1K_1] \cap [P_1L_1] = Q_1$.

13. Проведемо через точку Q_1 пряму, паралельну прямій MM_1. Вона перетне відрізок PL в точці Q.

14. $[KQ)$.

15. Проведемо через точку V_1 пряму, паралельну прямій MM_1. Вона перетне промінь KQ в точці V.

16. Z_1 — довільна точка кола, що лежить в основі циліндра.

17. $[Z_1L_1]$.

18. $[Z_1L_1] \cap [M_1K_1] = X_1$.

19. Проведемо через точку X_1 пряму, паралельну прямій MM_1. Вона перетне відрізок MK в точці X.

20. $[LX)$.

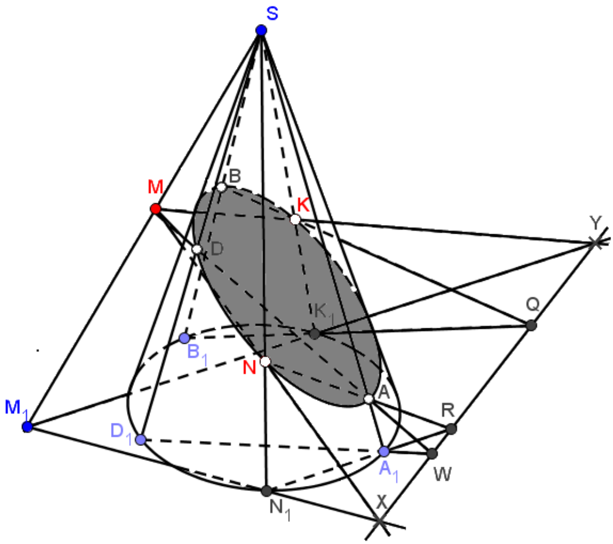
21. Проведемо через точку Z_1 пряму, паралельну прямій MM_1. Вона перетне промінь LX в точці Z.

22. Будуємо шуканий переріз — еліпс по точках M, V, L, Z, P.

Задача 1.18. *Побудувати переріз конуса площиною, заданою трьома точками, дві з яких K і N належать конічній поверхні, а третя M лежить поза конусом, причому відома її проекція M_1.*

Розв'язання (метод слідів). Коротко опишемо етапи побудови перерізу (мал. 1.35).

1. (MN).
2. (M_1N_1).
3. $(MN) \cap (M_1N_1) = X$.
4. (MK).
5. (M_1K_1).
6. $(MK) \cap (M_1K_1) = Y$.
7. (XY) — слід січної площини.
8. A_1 — довільна точка кола, що лежить в основі конуса.
9. (N_1A_1).
10. $(N_1A_1) \cap (XY) = R$.
11. (NR).
12. $(NR) \cap [SA_1] = A$.
13. B_1 — довільна точка кола, що лежить в основі конуса.
14. (B_1K_1).
15. $(B_1K_1) \cap (XY) = Q$.
16. (KQ).
17. $(KQ) \cap [SB_1] = B$.

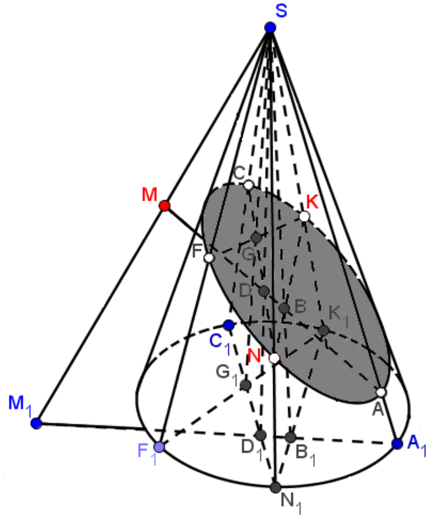


Мал. 1.35.

18. D_1 — довільна точка кола, що лежить в основі конуса.
19. (D_1A_1).
20. $(D_1A_1) \cap (XY) = W$.
21. (AW).
22. $(AW) \cap [SD_1] = D$.
23. Будуємо шуканий переріз — еліпс по точках B, D, N, A, K.

Розв'язання (метод центрального проектування). Коротко опишемо етапи побудови перерізу (мал. 1.36).

1. $K_1 = \text{пр}_\alpha K$.
2. $N_1 = \text{пр}_\alpha N$.
3. A_1 — довільна точка кола, що лежить в основі конуса.
4. $[A_1M_1]$.
5. $[N_1K_1]$.
6. $[A_1M_1] \cap [N_1K_1] = B_1$.
7. $[SB_1]$.
8. $[NK]$.
9. $[SB_1] \cap [NK] = B$.



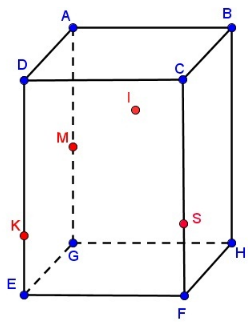
Мал. 1.36.

10. $[MB)$.
11. $[MB) \cap [SA_1] = A$.
12. C_1 — довільна точка кола, що лежить в основі конуса.
13. $[C_1N_1]$.
14. $[A_1M_1] \cap [C_1N_1] = D_1$.
15. $[SD_1]$.
16. $[SD_1] \cap [MA] = D$.
17. $[ND)$.
18. $[ND) \cap [SC_1] = C$.
19. F_1 — довільна точка кола, що лежить в основі конуса.
20. $[F_1K_1]$.
21. $[F_1K_1] \cap [C_1N_1] = G_1$.
22. $[SG_1]$.
23. $[CN]$.
24. $[SG_1] \cap [CN] = G$.
25. $[KG)$.
26. $[KG) \cap [SF_1] = F$.
27. Будуємо шуканий переріз — еліпс по точках C, F, N, A, K.

1.7 Перерізи просторових тіл складними геометричними об'єктами

Задача 1.19. *Побудувати переріз призми двогранним кутом, що проходить через чотири задані точки K, M, I, S, які не належать одній площині, з ребром, паралельним до грані $AGED$, причому відомо, що точки K, M належать одній із граней заданого двогранного кута, а точка I належить ребру двогранного кута і грані $AGHB$ даної призми.*

Розв'язання. Коротко опишемо етапи побудови перерізу (мал. 1.37). Виконаємо побудову шуканого перерізу за допомогою



Мал. 1.37.

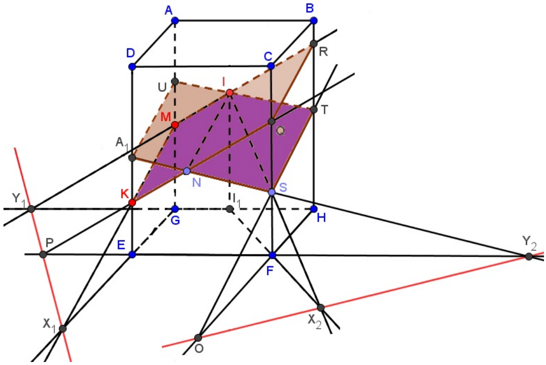
методу слідів.

Побудуємо спочатку одну із граней двогранного кута, яка проходить через точки K, M, I. Побудуємо слід січної площини в α, площині основи призми. Цей слід використаємо для того, щоб отримати точки перетину січної площини з ребрами призми. Для побудови сліду січної площини в площині α знайдемо точки перетину прямих MK та IM, які лежать в січній площині, з площиною α, тобто: $(MK)\cap(GE) = X_1$, $(IM)\cap(I_1G) = Y_1$. Через знайдені точки X_1 і Y_1 проведемо пряму X_1Y_1 — слід січної площини в площині α

основи призми. У цьому випадку для побудови перерізу не вистачає точок перетину січної площини з ребрами BH і CF даної призми. Продовжимо пряму Y_1I до перетину з ребром BH призми. Отримаємо точку R, яка належить площині перерізу. Далі продовжимо сторону FE основи до перетину з прямою X_1Y_1. Отримана точка належить січній площині і площині грані $DEFC$. Проведемо пряму PK, яка в перетині з ребром CF дає точку Q. Побудуємо площину однієї з граней двогранного кута через точки M, K, Q, R. За умовою задачі, точка I належить ребру двогранного кута. Проведемо через цю точку пряму, паралельну прямій MK. Вона перетне пряму KQ у точці N. Пряма IN буде ребром нашого двогранного кута. Побудуємо іншу грань двогранного кута, яка проходить через точки I, N, S. Побудуємо слід січної площини в площині α основи призми. Для побудови сліду січної площини в площині α знайдемо точки перетину прямих NS та IS, які лежать в січній площині, з площиною α, тобто: $(IS) \cap (I_1F) = X_2$, $(NS) \cap (EF) = Y_2$. Через знайдені точки X_2 і Y_2 проведемо пряму X_2Y_2 — слід січної площини двогранного кута в площині α основи призми. У цьому випадку для побудови перерізу не вистачає точок перетину січної площини з ребрами DE і AG призми. Продовжимо пряму SN до перетину з ребром DE призми. Отримаємо точку A_1, яка належить площині перерізу. Далі продовжимо сторону HF основи до перетину з прямою X_2Y_2. Отримана точка O належить січній площині і площині грані $CFHB$. Проведемо пряму OS, яка в перетині з ребром BH дає точку T. Проведемо пряму TI, яка в перетині з ребром AG дає точку U. Побудуємо площину другої з граней двогранного кута через точки U, A_1, S, T. Отже, отримали переріз призми двогранним кутом $MKNSTI$ (мал. 1.38).

Запишемо побудову перерізу призми, враховуючи символіку:

1. $(MK) \cap (GE) = X_1$.
2. $(IM) \cap (I_1G) = Y_1$.
3. (X_1Y_1).
4. $(Y_1I) \cap (BH) = R$.
5. $(FE) \cap (X_1Y_1) = P$.
6. $(PK) \cap (CF) = Q$.
7. $(MKQR)$.
8. $(IN) \parallel (MK)$.
9. $(IS) \cap (I_1F) = X_2$.



Мал. 1.38.

10. $(NS) \cap (EF) = Y_2$.
11. (X_2Y_2).
12. $(SN) \cap (DE) = A_1$.
13. $(HF) \cap (X_2Y_2) = O$.
14. $(OS) \cap (BH) = T$.
15. $(TI) \cap (AG) = U$.
16. (UA_1ST).
17. $(MKNSTI)$.

Постановка задачі є коректною тоді і тільки тоді, коли вказані всі умови, необхідні для виконання побудови. Побудову такого типу перерізів двогранним кутом можна виконати, якщо:

1) задано п'ять точок, дві з яких однозначно визначають ребро двогранного кута, а інші три не лежали в одній площині;

2) задано шість точок, по три в кожній площині (гранях двогранного кута);

3) задано чотири точки і вказано розміщення ребра двогранного кута.

Список використаних джерел

1. *Абрамов А. М.* Методика факультативних занятий в 7 — 8 классах, пособие для учителей. — Москва: Просвещение, 1981. — 160 с.

2. *Антоненко М. І.* Розв'язування геометричних задач. — Київ: Радянська школа, 1991. — 208 с.

3. *Апостолова Г. В.* Геометрія — 8. — Ґенеза, 2008. — 160 с.

4. *Бевз Г. П.* Математика в школах України. — Київ: Педагогічна преса, 2009. — 160 с.

5. *Гольдберг Я. Е.* С чего начинается решение стереометрической задачи. — Киев: Радянська школа, 1990. — 118 с.

6. *Гусев В. А., Литвиненко В. Н., Мордкович А. Г.* Практикум по решению математических задач. — Москва: Просвещение, 1985. — 223 с.

7. *Калашніков І. В., Синюк Н. Л.* Побудова перерізів просторових тіл у шкільному курсі математики. — Вінниця: Саміздат, 2011. — 34 с.

8. *Калашніков І. В., Сопотніцька Н. М.* Вибрані питання шкільного курсу стереометрії. — Вінниця: Вінниця, 2009. — 89 с.

9. *Каневський В.* Площа перерізу тетраедра // *Квант.* — 2004. — № 6. — С. 31 — 34.

10. *Кушнір І. А.* Трикутник і тетраедр у задачах. — Київ: Радянська школа, 1991. — 208 с.

11. *Мурач М. М.* Геометричні перетворення і симетрія. — Київ: Радянська школа, 1987. — 179 с. — Природа симетрії і симетрія природи.

12. *Орач Б. Г.* Побудова перерізів многогранників // *Математика.* — 2004. — № 27 — 28. — С. 18 — 22.

13. *Очеретнюк С.* Побудова перерізів пірамід та призм // *Математика.* — 2008. — № 39. — С. 14 — 18.

14. *Шарыгин И. Ф., Голубев В. И.* Факультативный курс по математике. — Москва: Просвещение, 1991. — 384 с. — Решение задач, 11 класс.

15. *Якимович В.* Теоретико-педагогічні засади розробки змісту навчання методів розв'язування стереометричних задач на побудову // *Математика в школі.* — 2008. — № 11 — 12. — С. 55 — 61.

Калашніков Ігор В'ячеславович
Синюк Наталя Леонідівна

Редактор Н. М. Калашнікова
Комп'ютерна верстка Н. М. Калашнікова

Калашніков І. В.

Побудова перерізів просторових тіл у шкільному курсі математики : І. В. Калашніков, Н. Л. Синюк. — Вінниця : СамІздат, 2012. — 57 с. : іл.